수재들을 위한

수학시험문제집

2

$\angle EBD = \angle BDE = y,\ \angle EDC = \angle ECD = x$

외국문도서출판사

주체94(2005)년

차 례

시 험 31

Ⅰ. 선택문제

1. $a=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$,

$b=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ 이고 n이 정의옹근수이면 a, b사이의 관계는 (　)이다.

(ㄱ) $a>b$, (ㄴ) $a=b$, (ㄷ) $a<b$, (ㄹ) 확정할수 없다

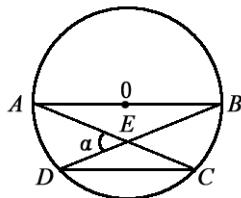
2. 련립방정식 $\begin{cases} xz-2yt=3 \\ xt+yz=1 \end{cases}$ 의 옹근수풀이는 (　　)개이다.

(ㄱ) 1,　(ㄴ) 2,　(ㄷ) 3,　(ㄹ) 4

3. 그림에서 AB는 원 O의 직경, CD는 AB에 평행인활줄, AC와 BD가 점E에서 사귀면 $\angle AED=\alpha$이다. $\triangle CDE$와 $\triangle ABE$의 면적의 비는 (　)이다.

(ㄱ) $\sin\alpha$,　(ㄴ) $\cos\alpha$,

(ㄷ) $\sin^2\alpha$,　(ㄹ) $\cos^2\alpha$

4. 방정식 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$의 두개의 실수풀이를 x_1, x_2이라고 할 때 $x_1^2+x_2^2$의 최대값은 (　)이다.

(ㄱ) 19,　(ㄴ) 18,　(ㄷ) $5\frac{5}{9}$,　(ㄹ) 우의 답이 모두 틀린다

5. 직3각형 ABC에서 CE는 직각 C의 2등분선이고 $CE+BC=AC$일 때 $\frac{AC}{BC}$는 (　　)와 같다.

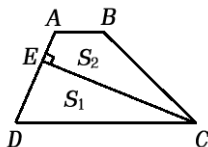
(ㄱ) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$, (ㄴ) $\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$, (ㄷ) $\frac{3\sqrt{2}-1}{2}$, (ㄹ) $2\sqrt{6}-\sqrt{2}$

6. 함수 $y=ax+\frac{1}{a}(1-x)(a>0,\ 0\le x\le 1)$의 최소값은 (　　)이다.

(ㄱ) a, (ㄴ) $\frac{1}{a}$, (ㄷ) $\begin{cases} a(0<a<1) \\ \frac{1}{a}(a \ge 1) \end{cases}$, (ㄹ) $\begin{cases} \frac{1}{a}(0<a<1) \\ a(a \ge 1) \end{cases}$

Ⅱ. 채우기문제

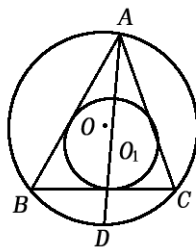
1. a, b, c는 모두 0이 아닌 실수이고 $ab=2(a+b)$, $bc=3(b+c)$, $ca=4(c+a)$일 때 $\frac{ac}{b}$는 ___이다.

2. 제형$ABCD(AB//CD)$에서 CE는 $\angle BCD$의 2등분선이고 $CE \perp AD$, $DE=2AE$이며 CE는 제형을 면적이 S_1, S_2인 부분으로 나눈다. 이때 $S_1=1$이면 S_2은 ______이다.

3. $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ 이면 $\frac{x^6+14x^3+50}{x^2+2x+2}=$ ________이다.

4. 변의 길이가 각각 6, 8, 10인 3각형의 내심과 외심사이의 거리는 ______이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. m과 n이 옹근수일 때 방정식 $2x^2-2mx+n=0$의 두 풀이 x_1, x_2은 $1 \le x_1 < 2$, $2 \le x_2 < 3$을 만족시키는가?

2. 그림에서 원 O는 $\triangle ABC$의 외접점이고 O_1는 내접점이다. 두 원의 반경을 각각 R, Y 라고 하자. AO_1를 연장하여 원 O와 점 D에서 사귀게 하면 $AO_1 \cdot O_1D=2Rr$임을 증명하시오.

3. 1994×1994 바른4각형표의 매 칸에 흰색 또는 검은색을 칠하는데 이 표의 중심에 관하여 대칭인 두개 칸도 서로 다른 색이 되게 한다. 이때 매 행과 매 렬에서 검은색칸의 수와 흰색칸의 수가 같게 할수 있는가? 왜 그런가?

시 험 32

Ⅰ. 선택문제

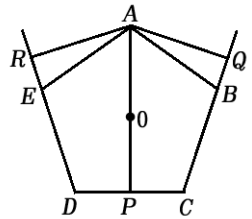
1. $a > b > c > d > 0$, $x=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$, $y=\sqrt{ac}+\sqrt{bd}$, $z=\sqrt{ad}+\sqrt{bc}$ 일 때 x, y, z의 크기관계는 ( )이다.

(ㄱ) $x < z < y$, (ㄴ) $y < z < x$, (ㄷ) $x < y < z$, (ㄹ) $z < y < x$

2. P가 씨수일 때 방정식 $x^2-px-580p=0$의 두 실수풀이는 모두 옹근수이다. 그러면 ( )이다.

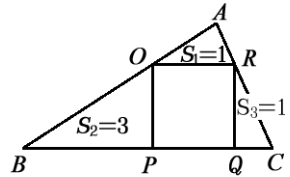
(ㄱ) $0 < p < 10$, (ㄴ) $10 < p < 20$,

(ㄷ) $20 < p < 30$, (ㄹ) $30 < p < 40$

3. 그림에서 $ABCDE$는 바른5각형이고 AP, AQ 및 AR는 A에서 CD, CB, DE 혹은 그 연장선에 그은 수직선이다. 점 O가 이 바른5각형의 중심이고 $OP=1$일 때 $AO+AQ+AR$는 ( )와 같다.

(ㄱ) 3, (ㄴ) $1+\sqrt{5}$, (ㄷ) 4, (ㄹ) $2+\sqrt{5}$

4. $a^2-3a+1=0$일 때 $\dfrac{2a^5-5a^4+2a^3-8a^2+7a}{3a^2+3}$의 값은 ( )와 같다.

(ㄱ) $\dfrac{4}{9}$, (ㄴ) $\dfrac{5}{9}$, (ㄷ) $\dfrac{2}{3}$, (ㄹ) $\dfrac{7}{9}$

5. 그림에서 바른4각형 $OPQR$가 $\triangle ABC$에 내접하였다. 이때 $\triangle AOR$, $\triangle BOP$와 $\triangle CRQ$의 면적이 각각 $S_1=1, S_2=3, S_3=1$이면 바른4각형 $OPQR$의 변의 길이는 ( )와 같다.

(ㄱ) $\sqrt{2}$, (ㄴ) $\sqrt{3}$, (ㄷ) 2, (ㄹ) 3

6. x, y, z가 부아닌 실수이고 $3x+2y+z=5$, $2x+y-3z=1$을 만족시킨다. $u=3x+y-7z$일 때 u의 최대값과 최소값의 합은 (   )와 같다.

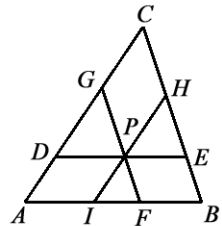
(ㄱ) $-\dfrac{62}{77}$, (ㄴ) $-\dfrac{64}{77}$, (ㄷ) $-\dfrac{68}{77}$, (ㄹ) $-\dfrac{74}{77}$

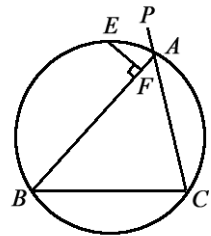
Ⅱ. 채우기문제

1. $n=1, 2, 3, \cdots, 1996$일 때 2차함수 $y=n(n+1)x^2-(2n+1)x+1$의 그라프가 x축에서 잘라내는 선분들의 길이의 합은 _____이다.

2. $\triangle ABC$에서 $AB=AC=2\sqrt{10}$, $BC=4$이다. AB를 직경으로 하는 원을 그리면 BC, AC와 점 D와 E에서 각각 사귄다. 그러면 $\triangle CDE$의 면적은_____이다.

3. 한 원의 아낙에 6000개의 점이 있는데 그중 임의의 세점은 한 직선에 놓이지 않는다. 이 원을 2000개의 부분으로 나누되 매 부분은 세개의 점을 포함하고 이 세점에 대하여 임의의 두점사이의 거리가 옹근수이면서 9를 넘지 않도록 한다. 이때 이 세점을 정점으로 하는 3각형들가운에서 크기가 꼭같은 3각형은 적어도 ________개이다.

4. 그림에 있는 $\triangle ABC$에서 $AB=425$, $BC=450$, $CA=510$이다. $\triangle ABC$의 아낙에 있는 점을 P라고 하면 선분 DE, FG, HI는 모두 점 P를 지나며 길이는 d이고 변 AB, BC, CA에 각각 평행이다. 그러면 $d=$_____이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. $\triangle ABC$에서 $AB>AC$, $\angle A$의 한 외각의 2등분선이 $\triangle ABC$의 외접원과 점 E에서 사귄다. 점 E에서 AB에 수직선을 긋고 AB와 사귀는 점 F라고 하면 $2AF=AB-AC$임을 증명하시오.

2. a가 어떤 실수일 때 방정식

$$\frac{1}{\sqrt{(a-1)x^2+2x-a}}=\frac{1}{\sqrt{2(a-1)x-2a+10}}$$

은 하나의 풀이를 가지겠는가?

3. 1994보다 작은 임의의 998개의 서로 다른 자연수들중에는 그것들중 어느 두수의 합과 같은 수가 적어도 한개 있다는것을 증명하시오.

시 험 33

Ⅰ. 선택문제

1. $x=\dfrac{\sqrt{111}-1}{2}$ 일 때 $y=(2x^5+2x^4-53x^2-57x+54)^{1997}$ 의 값은 ( )이다.

(ㄱ) 0, (ㄴ) -1, (ㄷ) 1, (ㄹ) 2^{1997}

2. 직3각형에서 빗변의 길이를 C, 내접원의 반경을 r라고 하면 내접원의 면적과 3각형의 면적의 비는 ( )이다.

(ㄱ) $\dfrac{\pi r}{c+2r}$, (ㄴ) $\dfrac{\pi r}{c+r}$, (ㄷ) $\dfrac{\pi r}{2c+r}$, (ㄹ) $\dfrac{\pi r^2}{c^2+r^2}$

3. m^2+m+7이 완전두제곱수로 되는 옹근수 m들 모두의 적은 ( )이다

(ㄱ) 84, (ㄴ) 86, (ㄷ) 88, (ㄹ) 90

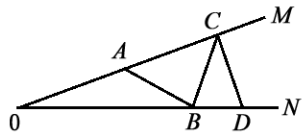
4. AB는 반원의 직경이고 BC는 점 B에서 $BC=\dfrac{AB}{2}=r$가 되게끔 반원을 자른 선이다. AC는 반원과 점 D에서 사귀고 DE는 AB와 수직이다. 이때 DE의 길이는 ( )이다.

(ㄱ) $\dfrac{3}{5}r$, (ㄴ) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$, (ㄷ) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}r$, (ㄹ) $\dfrac{4}{5}r$

5. 방정식 $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{4x+a}{x(x+1)}$가 하나의 실수풀이를 가지게 하는 실수 a의 개수는 ( )이다.

(ㄱ) 1, (ㄴ) 2, (ㄷ) 3, (ㄹ) 4

6. 그림에서 $\angle MON=20°$, A는 OM우의 한점, $OA=4\sqrt{3}$, D는 ON우의 한점, $OD=8\sqrt{3}$, C는 AM우의 임의의 한점, B는 OD우의 임의의 한점이다. 이때 꺾임선 $ABCD$의 길이 $AB+BC+CD$의 최소값은 ( )이다.

(ㄱ) 10, (ㄴ) 11, (ㄷ) 12, (ㄹ) 13

Ⅱ. 채우기문제

1. $y=\sqrt{4x^2+4x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}$ 의 최소값은 _____이다.

2. 제형 $ABCD$의 면적은 S이고 $AB//CD$, $AB=b$, $CD=a(a<b)$, 대각선 AC와 BD는 점 O에서 사귄다. $\triangle BOC$의 면적이 $\frac{2}{9}S$일 때 $\frac{a}{b}=$___이다.

3. $(x^2-x+1)^6$을 전개하면 $a_{12}x^{12}+a_{11}x^{11}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ 이 된다. 그러면 $a_{12}+a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0=$_______이다.

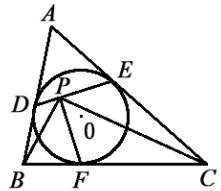
4. $\triangle ABC$에서 $\angle B=100°$, $\angle C$의 2등분선은 점 E에서 AB와 사귄다. AC우에서 $\angle CBD=20°$되는 점을 D라고 하고 D, E를 맺으면 $\angle CED=$_______이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 주어진 포물선 $y=x^2+ax+b$에 대하여 실수 p, q가 $ap=2(b+q)$를 만족시킨다. 이때

   (1) 포물선 $y=x^2+px+q$는 주어진 포물선의 정점을 지난다는 것을 증명하시오.

   (2) 다음의 두개의 2차방정식 $x^2+ax+b=0$과 $x^2+px+q=0$중에서 적어도 하나는 실수풀이를 가진다는것을 증명하시오.

2. 그림에서 원 O는 $\triangle ABC$의 내접원이고 D, E, F는 세개의 접점이다. DE를 맺고 점 F에서 DE에 수직인 선분FP를 그으면 $\angle DBP=\angle ECP$임을 증명하시오.

3. a, b가 정의옹근수일 때 a^2+b^2을 $a+b$로 나눈 상을 q, 나머지를 r라고 하면 $q^2+r=1993$을 만족시키는 a, b의 쌍을 모두 찾으시오.

시 험 34

Ⅰ. 선택문제

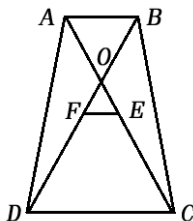
1. $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 일 때 $\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}-\sqrt[3]{x^4-x^2}$ 의 값은 ( )이다.

(ㄱ) $\frac{1}{2}$, (ㄴ) 1, (ㄷ) $\frac{\sqrt{5}}{2}$, (ㄹ) $\sqrt{5}$

2. 방정식 $(a-1)\ x^2-(2a-1)\ x+a+1=0$의 풀이는 모두 정수이다. 이때 취할수 있는 a의 값의 범위는 ( )이다.

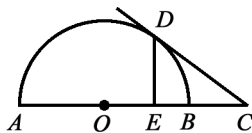
(ㄱ) $a<-1$ 또는 $a\geq 1$, (ㄴ) $a<-1$ 또는 $1<a\leq\frac{5}{4}$,

(ㄷ) $a<-1$ 또는 $a>1$, (ㄹ) $a<-1$ 또는 $1\leq a\leq\frac{5}{4}$

3. 제형 $ABCD$에서 $AB/\!/CD$, $CD>AB$이고 E, F는 각각 AC, BD의 가운데점, AC와 BD의 사귐점을 O, $\triangle OEF$는 변의 길이가 1인 바른3각형이다. $\triangle BOC$의 면적이 $S_{\triangle BOC}=\frac{15}{4}\sqrt{3}$ 일 때 $S_{ABCD}=$ ( )이다.

(ㄱ) $12\sqrt{3}$, (ㄴ) $14\sqrt{3}$, (ㄷ) $16\sqrt{3}$, (ㄹ) $18\sqrt{3}$

4. 실수 x, y가 $2x^2+y^2=6x$를 만족시킬 때 x^2+y^2+2x의 최대값은 ( )이다.

(ㄱ) 14, (ㄴ) 15, (ㄷ) 16, (ㄹ) 17

5. 그림에서 AB는 반원의 직경이고 점 O는 원의 중심, C는 AB의 연장선우의 점, CD와 반원이 접하는 점을 D라고 하자. $DE\perp AB$일 때 $AE:EB=4:1$, $CD=2$이면 BC의 길이는 ( )이다.

(ㄱ) 1, (ㄴ) $\frac{8}{9}$, (ㄷ) $\frac{4}{5}$, (ㄹ) $\frac{2}{3}$

6. 만일 포물선 $y=x^2-(k-1)\ x-k+1$과 x축과의 두개의 사귐점과

포물선의 정점이 바른3각형을 이룬다면 k값의 개수는 (　　)이다.

(ㄱ) 1,　　(ㄴ) 2,　　(ㄷ) 3,　　(ㄹ) 4

Ⅱ. 채우기문제

1. $\dfrac{x}{x^2+x+1}=a \quad (a\neq 0,\ a\neq \dfrac{1}{2})$이면 $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$의 값은 ______이다.

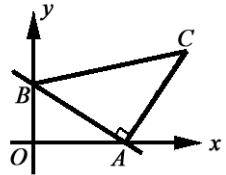
2. 바른6각형 $ABCDEF$에서 변 CD, DE의 가운데점을 M, N이라고 하고 AM과 BN의 사귐점을 P라고 하면 $\dfrac{BP}{PN}$의 값은 ______이다.

3. n이 정의옹근수이고 $9n^2+5n+26$이 이웃한 두 자연수의 적이 되면 $n=$ _______이다.

4. 한장의 직4각형종이 $ABCD$를 접어서 A, C가 일치되게 하였다. $AD=9$, $AB=12$일 때 접힌선의 길이는 ______이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. a, b는 $a^3-3a^2+5a=1$, $b^3-3b^2+5b=5$를 만족시킨다. $a+b$의 값을 구하시오.

2. 직선 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+1$과 x, y축과의 사귐점은 각각 A, B이고 AB를 한 직각변으로 하는 2등변3각형 ABC는 1사분구에 있다. 2사분구안의 한점 $P(a,\ \dfrac{1}{2})$에 대하여 $\triangle ABP$의 면적과 $\triangle ABC$의 면적이 같을 때 a의 값을 구하시오.

3. 두 동심원의 중심은 O이다. 작은 원의 한점 M을 지나는 작은 원의 활줄 MA와 큰 원의 활줄 BMC를 $MA\perp BC$되게 그으면 $AB^2+BC^2+CA^2$의 값은 일정하다는것을 증명하시오.

시 험 35

Ⅰ. 선택문제

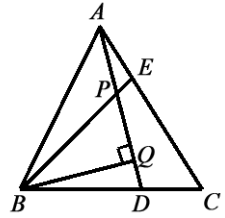
1. $\frac{1}{3+\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}+\frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{81\sqrt{79}+79\sqrt{81}}=(\quad)$

(ㄱ) $\frac{1}{3}$, (ㄴ) $\frac{4}{9}$, (ㄷ) $\frac{5}{9}$, (ㄹ) $\frac{2}{3}$

2. $\frac{1}{x}<2$ 이고 $\frac{1}{x}>-3$ 이면 취할수 있는 x의 값범위는 ( )이다.

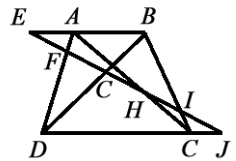
(ㄱ) $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$, (ㄴ) $-\frac{1}{3}<x<0$ 또는 $x>\frac{1}{2}$,

(ㄷ) $x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>\frac{1}{2}$, (ㄹ) 우의 답이 모두 틀린다

3. 그림에서 점 D, E는 각각 바른3각형ABC의 변 BC와 AC우의 점이고 $CD=AE$, AD와 BE는 점 P에서 사귄다. 점 B에서 AD에 수직선 BQ를 그었을 때 $PE=1$, $PQ=3$이다. 이때 AD의 길이는 ( )이다.

(ㄱ) $4\sqrt{3}$, (ㄴ) 6, (ㄷ) 7, (ㄹ) 8

4. 실수 a, b가 각각 $\frac{4}{a^4}-\frac{2}{a^2}-3=0$, $b^4+b^2-3=0$을 만족시킬 때 $\frac{a^4b^4+4}{a^4}$의 값은 ( )이다.

(ㄱ) 7, (ㄴ) 8, (ㄷ) 9, (ㄹ) 10

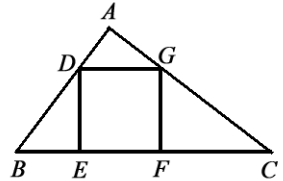
5. 그림에서 한 직선이 제형 $ABCD$의 변 BA, DC의 연장선과 각각 점 E, J에서 사귀며 AD, BD, AC, BC와 각각 점 F, G, H, I에서 사귄다. $EF=FG=GH=HI=IJ$일 때 $\frac{AB}{CD}$는 ( )와 같다.

(ㄱ) $\frac{2}{5}$, (ㄴ) $\frac{1}{2}$, (ㄷ) $\frac{3}{5}$ (ㄹ) $\frac{2}{3}$

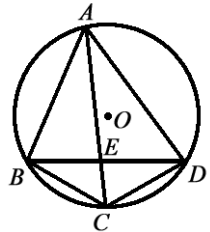
6. 원 O의 반경을 r, 두 직경을 AB, CD, $\angle AOC=60^\circ$, P를 BC의 임의의 한점이라고 할 때 PA와 PD는 각각 CD, AB와 점 E, F에서 사귄다. 이때 $AE\cdot AP+DF\cdot DP=($　　$)$이다.

(ㄱ) $3r^2$, (ㄴ) $2\sqrt{3}r^2$, (ㄷ) $4r^2$, (ㄹ) $3\sqrt{2}r^2$

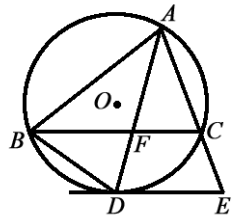
Ⅱ. 채우기문제

1. 2차함수 $y=-x^2-mx+m+2$의 그라프의 정점을 A, x축과의 두 사귐점을 각각 B, C라고 하면 $\triangle ABC$의 면적의 최소값은 ___이다.

2. 그림에서 직3각형 ABC의 아낙에 직4각형 $DEFG$가 내접하였다. 점 D는 AB우에 있고 점 G는 AC우에 있으며 EF는 빗변 BC우에 있다. $AB=3$, $AC=4$, 직4각형 $DEFG$의 면적이 $\frac{5}{3}$일 때 BE의 길이는 _____이다.

3. n이 자연수일 때 $2^8+2^{11}+2^n$이 완전두제곱수이면 $n=$_____이다.

4. 그림에서 A, B, C, D는 한원우에 있는 점이고 $BC=CD=4$, $AE=6$이다. 선분 BE와 DE의 길이가 모두 정의옹근수이면 BD의 길이는 ____이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 방정식 $x^2-pqx+p+q=0$이 옹근수풀이를 가질 때 자연수 p, q의 값을 구하시오.

2. 그림에서 $\triangle ABC$는 원 O의 내접3각형이다. $\angle BAC$의 2등분선은 BC와 점 F에서, 사귀고 원둘레와 점 D에서 사귄다. DE는 점 D에서 원둘레와 접하며 AC의 연장선과 점 E에서 사귄다. BD를 맺고 $BD=3\sqrt{2}$, $DE+EC=6$, $AB:AC=3:2$일 때 BF의 길이를 구하시오.

3. 2차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$의 그라프는 x, y축과 각각 한 점에서만 사귀는데 그 점을 각각 P, Q라고 하자. $PQ=2\sqrt{2}$, $b+2ac=0$, 1차함수 $y=x+m$은 점 P를 지나며 2차함수의 그라프와 다른 한점 R에서 사귄다. $\triangle PQR$의 면적을 구하시오.

시 험 36

Ⅰ. 선택문제

1. 같기식 $\sqrt{a(x-a)}+\sqrt{a(y-a)}=\sqrt{x-a}-\sqrt{a-y}$ 는 실수범위내에서 성립하며 그중 a, x, y는 서로 다른 실수이다. 이때 $\dfrac{3x^2+xy-y^2}{x^2-xy+y^2}$의 값은 ( )이다.

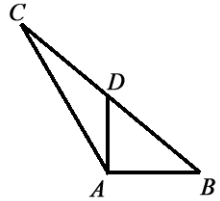
(ㄱ) 3, (ㄴ) $\dfrac{1}{3}$, (ㄷ) 2, (ㄹ) $\dfrac{5}{3}$

2. 2차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$의 대칭축이 $x=2$이고 $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=\pi$, $x_3=0$일 때 대응하는 y의 값을 y_1, y_2, y_3이라고 하면 y_1, y_2, y_3의 크기관계는 ( )이다.

(ㄱ) $y_1<y_2<y_3$, (ㄴ) $y_1>y_2>y_3$,
(ㄷ) $y_2<y_1<y_3$, (ㄹ) $y_2>y_1>y_3$

3. $\triangle ABC$에서 $\angle CAB=120°$, $AD\perp AB$이고 $AB=CD=1$일 때 BD의 길이는 ( )이다.

(ㄱ) $\sqrt{2}$, (ㄴ) $\sqrt{3}$, (ㄷ) $\sqrt[3]{2}$, (ㄹ) $\sqrt[3]{3}$

C
D
A
B

4. 방정식 $\left[3x-4\dfrac{5}{6}\right]-2x-1=0$ 의 실수풀이의 개수는 ( )이다. 여기서 [ ]은 x값을 넘지 않는 최대의 옹근수를 표시한다.

(ㄱ) 1, (ㄴ) 2, (ㄷ) 3, (ㄹ) 4

5. 4각형 $ABCD$에서 $\angle DAB=\angle CBA$, $\angle CDA=90°$, $\angle BCD=78°$, $AB=2AD$이다. 이때 $\angle CAD$의 크기는 ( )이다.

(ㄱ) 60°, (ㄴ) 66°, (ㄷ) 72°, (ㄹ) 80°

6. 2차함수의 그라프는 두점 $A(1, 0)$과 $B(5, 0)$을 지난다. 그러나 직선 $y=2x$우의 점은 지나지 않는다. 이때 그 정점의 세로자리표의 최대값과 최소값의 적은 ( )이다.

(ㄱ) 3, (ㄴ) 4, (ㄷ) 5, (ㄹ) 6

Ⅱ. 채우기문제

1. a, b, c가 실수이고 $b^2-bc-8a+7=0$, $b^2+c^2+bc-6a+6=0$일

때 a가 취할수 있는 값범위는 _____이다.

2. 부채형 OAB의 활줄 $AB=18$이고 반경이 6인 원 C가 OA, OB, $\overset{\frown}{AB}$와 접하며 원 D는 원 C, OA, OB와 접한다. 이때 원 D의 반경은 _____이다.

3. a는 $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$ 의 소수부이고 b는 $\sqrt{6+3\sqrt{3}}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}$ 의 소수부일 때 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$의 값은 ____이다.

4. 바른4각형 $ABCD$의 아낙에 있는 한점에서 세 정점까지의 거리는 각각 1, 2, 3이다. 이때 이 바른4각형의 면적은 _____이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. a, b는 옹근수이고 방정식 $ax^2+bx+1=0$의 서로 다른 정수풀이는 모두 1보다 작다. a의 최소값을 구하시오.

2. 바른6각형 $ABCDEF$의 한변의 길이가 1이고 그안에 변 AB에 평행인 임의의 선분 QR가 있다. $ABCDEF$에 내접된 QR를 밑변으로 하는 3각형 PQR의 면적의 최대값을 구하시오.

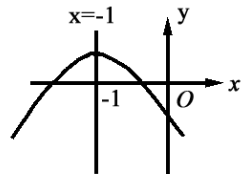
3. $\triangle ABC$에서 D는 변 AC우의 한점이고 $AD:DC=2:1$, $\angle C=45°$, $\angle ADB=60°$일 때 AB는 $\triangle BCD$의 내접원의 접선이라는것을 증명하시오.

시 험 37

Ⅰ. 선택문제

1. a, b, c, d, m, n은 모두 정수이고 $P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$, $Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$ 이면 P, Q의 크기관계는 (   )이다.

(ㄱ) $P\geq Q$, (ㄴ) $P\leq Q$, (ㄷ) $P>Q$, (ㄹ) 확정할수 없다

2. 2차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그라프가 그림과 같을 때 다음의 6개의 대수식 b^2-4ac, abc, $a-b+c$, $a+b+c$, $2a-b$, $9a-4b$ 중에서 그 값이 부수인 식의 개수는 (   )이다.

(ㄱ) 1, (ㄴ) 2, (ㄷ) 3, (ㄹ) 4

3. 직경이 d인 원 O에서 AB와 CD는 서로 수직인 두 활줄일 때 다음의 식들가운데서 정확한것은 ( )이다.

(ㄱ) $AC^2+BD^2>d^2$,

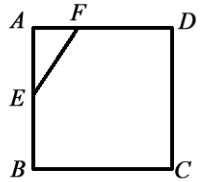
(ㄴ) $AC^2+BD^2<d^2$,

(ㄷ) $AC^2+BD^2=d^2$,

(ㄹ) AC^2+BD^2과 d^2의 크기관계는 확정할수 없다

4. 방정식 $19x+93y=4xy$의 정의옹근수풀이는 ( )개이다.

(ㄱ) 1, (ㄴ) 2, (ㄷ) 3, (ㄹ) 4

5. 한변의 길이가 a인 바른4각형$ABCD$에서 한 직선이 AB, AD와 사귀는 점을 각각 E, F라고 하자. $\triangle AEF$의 면적이 바른4각형면적의 $\frac{6}{25}$, 5각형 $EBCDF$의 둘레의 길이가 바른4각형 $ABCD$둘레의 길이의 $\frac{9}{10}$이면 $\triangle AEF$의 둘레의 길이는 ( )이다.

(ㄱ) $2a$, (ㄴ) $\frac{12}{5}a$, (ㄷ) $\frac{5}{2}a$, (ㄹ) $3a$

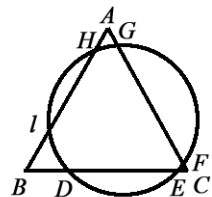
6. $\frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1}=1$일 때 $\frac{x^3}{x^6-2\sqrt{2}x^3+1}$의 값은 ( )이다.

(ㄱ) $\frac{1}{4}$, (ㄴ) 4, (ㄷ) $\frac{\sqrt{2}}{5}$, (ㄹ) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

Ⅱ. 채우기문제

1. 반경이 R인 원 O에서 두개의 활줄 $AB=R$, $CD=\sqrt{3}R$이다. $AB//CD$이면 AB와 CD사이의 거리는 ____이다.

2. 함수 $y=x(x+1)(x+2)(x+3)$ 의 최소값은 ____이다.

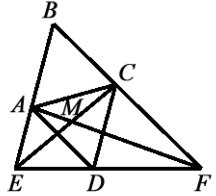
3. 그림에서 바른3각형 ABC의 세변이 하나의 원둘레와 6개의 점에서 사귄다. $AG=2$, $GF=13$, $FC=1$, $HI=7$일 때 DE의 길이는 ____이다.

4. x에 관한 방정식 $x^2-x+1-m=0$의 두 실수풀이 α, β가 $|\alpha|+|\beta|=5$를 만족시킬 때

m이 취할수 있는 값범위는 ____이다.

Ⅲ. **풀이문제**

1. 함수 $y = 4x^2-4ax+a^2-2a+2(0\le x\le 2)$의 최소값이 3일 때 a의 값을 구하시오.

2. x, y는 실수이고 $x^2+xy+y^2=1$일 때 x^2-xy+y^2의 값범위를 구하시오.

3. 등변4각형 $ABCD$에서 $\angle B=60°$, D를 지나는 직선과 BA, BC의 연장선과의 사귐점을 각각 E, F라고 하고 AF, CE의 사귐점을 M이라고 할 때 $CA^2=CE\cdot CM$임을 증명하시오.

시 험 38

Ⅰ. **선택문제**

1. 2차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그라프는 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그라프를 평행이동하여 얻는다. 만약 그라프가 x축과 두점 A, $C(-1, 0)$에서 사귀고 y축과 점 D $(0, \frac{5}{2})$에서 사귀며 정점이 B일 때 4각형 $ABCD$의 면적은 ( )이다.

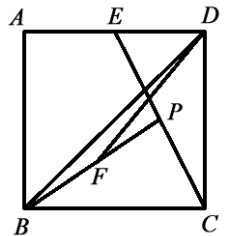
(ㄱ) 9, (ㄴ) 10, (ㄷ) 11, (ㄹ) 12

2. $\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^6$을 넘지 않는 최대옹근수는 ( )이다.

(ㄱ) 7038, (ㄴ) 7039, (ㄷ) 7040, (ㄹ) 7041

3. 한변의 길이가 1인 바른4각형 $ABCD$에서 E는 AD의 가운데점, P는 CE의 가운데점, F는 BP의 가운데점일 때 F에서 BD까지의 거리는 ( )이다.

(ㄱ) $\frac{\sqrt{2}}{8}$, (ㄴ) $\frac{\sqrt{2}}{10}$, (ㄷ) $\frac{\sqrt{2}}{12}$, (ㄹ) $\frac{\sqrt{2}}{16}$

4. k는 실수이고 방정식 $x^2-2kx+k+6=0$의 두 실수풀이를 a, b

라고 할 때 $(a-1)^2+(b-1)^2$의 최소값은 ( )이다.

(ㄱ) 0, (ㄴ) 8, (ㄷ) $12\frac{1}{4}$, (ㄹ) 18

5. 2등변직3각형 ABC에서 빗변 Ac우의 한점을 P라고 하자. 점 P에서 AB에 그은 수직선의 밑점을 E, BC에 그은 수직선의 밑점을 F, EF에 그은 수직선의 밑점을 G라고 하고 GP의 연장선우에서 $PD=PB$되는 점을 D라고 할 때 BC와 DC사이에는 반드시 ( )관계가 있다.

(ㄱ) 같으나 수직이 아니다, (ㄴ) 같지 않으나 수직이다,
(ㄷ) 같고 수직이다, (ㄹ) 같지도 않고 수직도 아니다

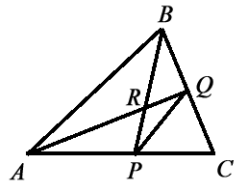
6. 방정식 $x^2+3x^2y^2-30y^2=517$의 옹근수풀이의 조는 ( )개이다.

(ㄱ) 1, (ㄴ) 2, (ㄷ) 3, (ㄹ) 4

Ⅱ. 채우기문제

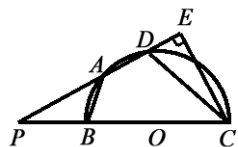
1. $0<x<a$일 때 다음식을 간단히 하면

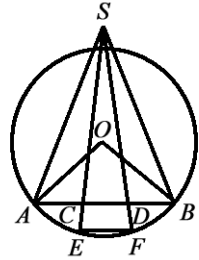
$$\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}-\left(\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a+x}\right)\left[\frac{x}{2}-\frac{ax}{\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}\right)^2}\right]=______$$ 이다.

2. $\triangle ABC$에서 $\angle B$의 2등분선은 변 AC와 점 P에서 사귀고 $\angle A$의 2등분선은 변 BC와 점 Q에서 사귄다. 만일 세점 P, Q, C를 지나는 원둘레가 $\triangle ABC$의 내심 R를 지나면서 $PQ=1$이면 PR의 길이는 ____이다.

3. $|P|\le 2$를 만족시키는 모든 실수 p에 대하여 부등식 $x^2+px+1>2x+p$를 성립시키는 x의 범위는 _____이다.

4. $\angle c=90°$인 $\triangle ABC$에서 세변 a, b, c에 대한 방정식 $a(1-x^2)-2\sqrt{2}bx+c(1+x^2)=0$의 두 풀이의 두제곱의 합이 12이면 $a:b:c$ $=$_____이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 원에 내접한 4각형 $ABCD$에서 $AB=AD$, $PB=BO$, $CE\perp PE$, $CD=18$일 때 DE를 구하시오.

2. 두 실수 x와 y의 두제곱의 합이 7이고 세제곱의 합이 10일 때 $x+y$의 최대값을 구하시오.

3. 원 O의 활줄 AB가 두 점 C, D에 의하여 3등분되고 활등 AB가 점 E, F에 의하여 3등분 되였다. EC와 FD의 사귐점을 S라고 하면 $\angle ASB = \frac{1}{3} \angle AOB$임을 증명하시오.

시 험 39

Ⅰ. 선택문제

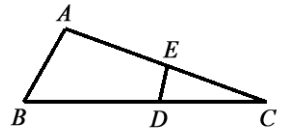
1. $abc \neq 0$이고 $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{-a+b+c}{a}$ 일 때 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$는 (　　)와 같다.

(ㄱ) 8,　(ㄴ) -1,　(ㄷ) 8 또는 -1,　(ㄹ) 확정할수 없다

2. 방정식 $7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$ (k는 실수)의 두 실수풀이가 α, β이고 $0<\alpha<1$, $1<\beta<2$일 때 k가 취할수 있는 값범위는 (　)이다.

(ㄱ) $3<k<4$,　(ㄴ) $-2<k<-1$,

(ㄷ) $3<k<4$ 또는 $-2<k<-1$,　(ㄹ) 풀이가 없다

3. $\triangle ABC$에서 $\angle A=100°$, $\angle B=60°$, $BC=1$이고 E는 AC의 가운데점, D는 변 BC우의 한점이며 $\angle CED=80°$이다. 이때 $S_{\triangle ABC}+2S_{\triangle CDE}=$ (　　)이다.

(ㄱ) $\frac{\sqrt{2}}{4}$, (ㄴ) $\frac{\sqrt{3}}{8}$, (ㄷ) $\frac{\sqrt{3}}{6}$, (ㄹ) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

4. $a>0$, $b>0$이고 $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+2\sqrt[3]{b}\right)=\sqrt[3]{b}(\sqrt{a}+6\sqrt[3]{b})$ 일 때 $\frac{2a^4+a^3b-128ab^2-64b^3+b^4}{a^4+2a^3b-64ab^2-128b^3+2b^4}$ 의 값은 (　　)이다.

(ㄱ) $-\frac{1}{2}$,　　(ㄴ) 0,　　(ㄷ) $\frac{1}{2}$,　　(ㄹ) 2

5. $\triangle ABC$안에 있는 한점 P를 지나며 세변에 각각 평행인 직선을 그린다. 이때 얻어지는 3개의 3각형의 면적이 각각 4, 9, 49이면 $\triangle ABC$의 면적은 (　)와 같다.

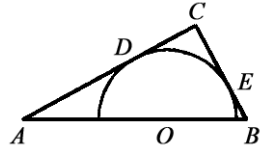
(ㄱ) 100, (ㄴ) 144, (ㄷ) 169, (ㄹ)196

6. p가 씨수이고 p^4의 약수전부의 합이 완전두제곱수이면 이 조건을 만족시키는 씨수 p의 개수는 (　)이다.

(ㄱ) 1,　　(ㄴ) 2,　　(ㄷ) 3,　　(ㄹ) 4

Ⅱ. 채우기문제

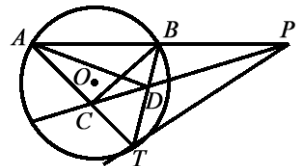
1. 어떤 2차함수가 $x=\frac{1}{2}$일 때 최대값 25를 가지고 그라프와 x축이 두점에서 사귀며 두 사귐점의 가로자리표의 두제곱의 합이 13이면 이 2차함수의 식은 _____이다.

2. 그림에서 반원의 중심 O는 직3각형 ABC의 빗변 AB우에 있고 두 직각변과 각각 D, E에서 접한다. $\triangle ABC$의 면적이 S이고 빗변의 길이가 C이면 원의 반경은 ____이다.

3. 함수 $y=\frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}$의 최대값과 최소값의 적은 이다.

4. $AB=AC$인 2등변3각형 ABC에서 정각 $\angle A=20^\circ$ 이고 변 AB우의 한점 D를 $AD=BC$되게 취하면 $\angle BDC$의 크기는 _____이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 변의 길이가 1인 바른3각형 ABC에서 정점 A를 지나는 직선 l을 긋고 정점 B, C에서 직선 l까지의 거리를 각각 d_1, d_2이라고 할 때 d_1+d_2의 최대값을 구하시오.

2. 그림의 원 O에서 $\angle AOB=120°$, PT와 원 O는 T에서 접하고 세점 A, B, P가 한 직선에 놓이면 $\angle APT$의 2등분선은 AT, BT와 각각 C, D에서 사귄다. $\triangle ACD \backsim \triangle COB$임을 증명하시오.

3. 자연수 n이 m개의 정의홀수인 약수(약수 1을 포함)를 가지면 n은 $m-1$개의 련이은 자연수들의 합형태로 표시된다는것을 증명하시오.

시 험 40

Ⅰ. 선택문제

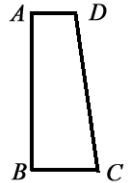
1. $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$일 때 $\dfrac{x^2+x+1}{x^5}$의 값은 ( )이다.

(ㄱ) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, (ㄴ) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, (ㄷ) $\dfrac{1}{2}$, (ㄹ) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

2. m, n은 모두 정의 실수이고 방정식 $x^2+mx+2n=0$과 방정식 $x^2+2nx+m=0$은 모두 실수풀이를 가진다. 이때 $m+n$의 최소값은 ( )이다.

(ㄱ) 4, (ㄴ) 6, (ㄷ) 8, (ㄹ) 10

3. $\angle A=90°$, $\angle B=90°$인 직각제형 $ABCD$에서 $AB=7$, $AD=2$, $BC=3$이다. AB우의 점 p를 찍고 P, A, D를 정점으로 하는 3각형과 P, B, C를 정점으로 하는 3각형이 서로 닮은 3각형이라면 이런 점 P는 ( )개 있다.

A D B C

(ㄱ) 1, (ㄴ) 2, (ㄷ) 3, (ㄹ) 4

4. $\triangle ABC$에서 $\angle C=90°$, $\angle A$의 2등분선이 BC와 사귀는 점을 D라고 하면 $\dfrac{AB-AC}{CD}$는 ( )과 같다.

(ㄱ) $\sin A$, (ㄴ) $\cos A$, (ㄷ) $\tan A$, (ㄹ) $\cot A$

5. x, y는 실수이고 $x+y$, $x-y$, xy, $\dfrac{x}{y}$의 4개의 수가운데서 3개가 같은 수값을 가진다면 이런 성질을 가지는 수의 쌍(x, y)의 개수는 ( )이다.

(ㄱ) 1, (ㄴ) 2, (ㄷ) 3, (ㄹ) 4

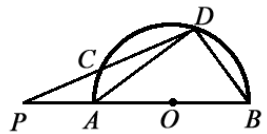
6. $a=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}-\frac{1}{8}\sqrt{2}$ 일 때 $a^2+\sqrt{a^4+a+1}$ 의 값은 ( )와 같다.

(ㄱ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, (ㄴ) $\sqrt{2}$, (ㄷ) $\frac{2\sqrt{2}}{2}$, (ㄹ) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Ⅱ. 채우기문제

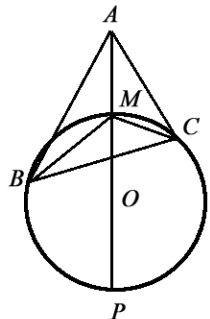
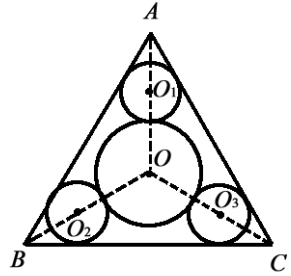
1. 직4각형의 대각선의 길이가 $\sqrt{10}$ 이고 두 이웃변 a, b 의 길이가 $m^2+a^2m-12a=0, m^2+b^2m-12b=0(m\neq 0)$을 만족시키는 직4각형의 둘레는 ______이다.

2. $x>0$일 때 $\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)^6-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$의 최소값은 ___과 같다.

3. 그림에서 AB는 반원의 직경이고 C, D는 반원우의 두점이다. $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$, DC와 BA의 연장선이 사귀는 점을 P라고 할 때 $AP : CP=3 : 4$이고 $\triangle ADB$의 면적이 $16\sqrt{5}$이면 AP의 길이는 _____이다.

4. 점 $M(a, b)$는 1사분구의 점이다. 1차함수가 점 M을 지날 때 이 직선과 자리표축들로 이루어지는 3각형의 면적이 최소로 되는 직선의 방정식은 _____이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. x에 관한 방정식 $(m-8)x^2-2(m-4)x-(m+2)=0$이 적어도 하나의 부수풀이를 가질 때 취할수 있는 m의 값범위를 구하시오.

2. 그림에서 점 M은 $\triangle ABC$의 아낙의 한 점이고 $\angle BMC=90°+\frac{1}{2}\angle BAC$, 직선 AM은 $\triangle BMC$의 외접원의 중심 O를 지난다. 점 M은 $\triangle ABC$의 내심이라는것을 증명하시오.

3. 변의 길이가 1인 바른3각형의 무게중심은 O이다. 바른3각형안에 원의 중심이 O인 하나의 원(원 O)을 그리고 다시 3각형의 두변과 원 O의 원둘레와 접하는 원 O_1, 원 O_2, 원 O_3을 그린다. 이때 4개 원의 면적들의 총합의 최대값과 최소값, 그리고 면적의 총합이 최대로 될 때 원 O의 반경을 구하시오.

시 험 41

Ⅰ. 선택문제

1. $|a-b|+ab=1$을 만족시키는 부아닌 수들의 쌍(a, b)의 개수는 (　)이다.

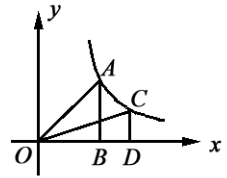
(ㄱ) 1, (ㄴ) 2, (ㄷ) 3, (ㄹ) 4

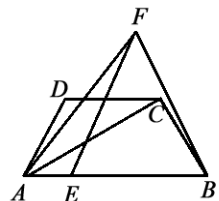
2. x_0이 1원2차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$의 풀이일 때 판별식 $\triangle=b^2-4ac$와 두제곱식 $M=(2ax_0+b)^2$의 관계는 (　)이다.

(ㄱ) $\triangle>M$, (ㄴ) $\triangle=M$, (ㄷ) $\triangle<M$, (ㄹ) 확정할수 없다

3. $x^2-13x+1=0$일 때 x^4+x^{-4}의 일의 자리수는 (　)이다.

(ㄱ) 1, (ㄴ) 3, (ㄷ) 5, (ㄹ) 7

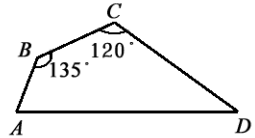
4. 그림에서 비례함수 $y=x$와 $y=ax(a>0)$의 그라프는 거꿀비례함수 $y=\frac{k}{x}(k>0)$의 그라프와 각각 점 A, C에서 사귄다. 만일 직3각형 AOB와 직3각형 COD의 면적이 각각 S_1, S_2이라면 S_1와 S_2의 관계는 (　)이다.

(ㄱ) $S_1>S_2$, (ㄴ) $S_1=S_2$, (ㄷ) $S_1<S_2$ (ㄹ) 확정할수 없다

5. 등변제형 $ABCD$에서 $AB//CD$, $AB=2CD$, $\angle A=60°$, E는 밑변 AB우의 한점이고 $FE=FB=AC$, $FA=AB$이면 $AE:EB$는 (　)와 같다.

(ㄱ) 1: 2, (ㄴ) 1: 3, (ㄷ) 2: 5, (ㄹ) 3: 10

6. $x_1, x_2, \cdots, x_9$가 모두 정의옹근수이고 $x_1 < x_2 < \cdots < x_9$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = 220$이다. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$가 최대값을 가질 때 $x_9 - x_1$의 최소값은 (　)이다.

(ㄱ) 8,　　(ㄴ) 9,　　(ㄷ) 10,　　(ㄹ) 11

Ⅱ. 채우기문제

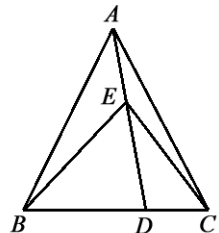
1. 그림의 4각형 $ABCD$에서 $\angle ABC = 135°$, $\angle BCD = 120°$, $AB = \sqrt{6}$, $BC = 5 - \sqrt{3}$, $CD = 6$이면 $AD =$ ＿＿이다.

2. $x \neq 0$일 때 $\dfrac{\sqrt{1+x^2+x^4} - \sqrt{1+x^4}}{x}$의 최대값은 ＿＿이다.

3. $\triangle ABC$에서 $\angle C = 90°$, $\angle A$와 $\angle B$의 2등분선의 사귐점을 P, P에서 AB에 그은 수직선의 밑점을 E라고 하자. 만일 $BC = 2$, $AC = 3$이면 $AE \cdot EB =$ ＿＿이다.

4. 만일 a, b가 모두 정의 실수이고 $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a+b} = 0$이면 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^3 + \left(\dfrac{a}{b}\right)^3 =$ ＿＿이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 2등변3각형의 한변과 밑변의 길이가 방정식 $x^2 - 6x + a = 0$의 두 풀이이고 또 이런 3각형이 한개일 때 a가 취할수 있는 값범위를 구하시오.

2. $\triangle ABC$에서 $AB = AC$, D는 밑변 BC우의 한점, 점E는 선분 AD우의 한점이고 $\angle BED = 2\angle CED = \angle A$일 때 $BD = 2CD$임을 증명하시오.

3. 어떤 구역의 전화번호 M, N은 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6중에서 서로 다른 6개의 수자들로 구성되여있다. 4개의 번호는 알고있다.

(ㄱ) 320651,　　(ㄴ) 105263,

(ㄷ) 612305,　　(ㄹ) 316250

M, N은 ㄱ), ㄴ), ㄷ)와 어느 두개 수자의 위치가 같고 ㄹ)와는 세개 수자의 위치가 같다는것을 알고있다. M과 N을 구하시오.

시 험 42

Ⅰ. 선택문제

1. 다항식 $x^{12}-x^6+1$을 x^2-1로 나눈 나머지는 (　　　)이다.

(ㄱ) 1, (ㄴ) -1, (ㄷ) $x-1$, (ㄹ) $x+1$

2. 명제

① 내각이 같은 원의 내접5각형은 바른5각형이다,

② 내각이 같은 원의 내접4각형은 바른4각형이다

에 대하여 아래의 결론에서 정확한것은 ( )이다.

(ㄱ) ①, ②가 모두 옳다 (ㄴ) ①은 맞고 ②는 틀린다

(ㄷ) ①은 틀리고 ②는 옳다 (ㄹ) ①, ②는 모두 틀린다

3. x가 실수이고 $y=|x-1|+|x+1|$이라고 하자. 아래의 결론

① y의 최소값은 없다,

② 하나의 x값에 대해서만 y는 최소값을 가진다,

③ 유한개의 x값에 대하여 (하나가 아니다) y는 최대값을 가진다,

④ 무한개의 x값에 대하여 y는 최소값을 가진다

에서 정확한것은 ( )이다.

(ㄱ) ①, (ㄴ) ②, (ㄷ) ③, (ㄹ) ④

4. 실수 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5는 련립방정식

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a_1 \\ x_2+x_3+x_4=a_2 \\ x_3+x_4+x_5=a_3 \\ x_4+x_5+x_1=a_4 \\ x_5+x_1+x_2=a_5 \end{cases}$$

를 만족시키고 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5는 실수인 상수이며 $a_1>a_2>a_3>a_4>a_5$이다. 그러면 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5의 크기순서는 (　　)이다.

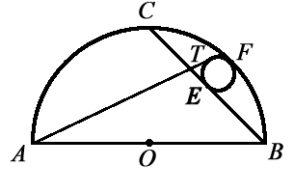
(ㄱ) $x_1>x_2>x_3>x_4>x_5$, (ㄴ) $x_4>x_2>x_1>x_3>x_5$,

(ㄷ) $x_3>x_1>x_4>x_2>x_5$, (ㄹ) $x_5>x_3>x_1>x_4>x_2$,

5. 부등식 $x-1<(x-1)^2<3x+7$의 옹근수풀이의 개수는 (　) 이다.

(ㄱ) 4 (ㄴ) 4보다 작다 (ㄷ) 5보다 크다 (ㄹ) 5

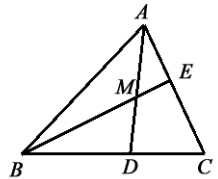
6. 그림에서 AB는 반원 O의 직경이고 그 길이는 4이다. C는 반원둘레의 가운데점, E는 BC의 가운데점, 하나의 작은 원이 활줄 BC와 E에서 접하고 BC와 F에서 접한다. A에서 작은 원에 그은 접선 AT의 길이는 (   )이다.

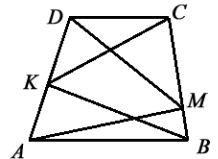
(ㄱ) $2+\sqrt{2}$, (ㄴ) $1+\sqrt{5}$, (ㄷ) $2+\sqrt{3}$, (ㄹ) $7-2\sqrt{3}$

Ⅱ. 채우기문제

1. x가 변할 때 분수식 $\dfrac{3x^2+6x+5}{\frac{1}{2}x^2+x+1}$의 최소값은 ____이다.

2. 작은 구가 들어있는 1993개의 통을 왼쪽에서부터 오른쪽으로 한줄로 배렬하였다. 제일 왼쪽 첫통에 7개의 작은 구가 있고 련이어 놓여있는 4개의 통에는 모두 30개의 작은 구들이 들어있다. 그러면 오른쪽 끝의 통속에는 _____개의 작은 구가 있다.

3. 방정식 $(x^2-1)(x^2-4)=k$가 령이 아닌 4개의 실수풀이를 가지는데 이것들을 x축에 배렬하면 같은 거리에 놓인다. 그러면 $k=$_____이다.

4. $\triangle ABC$에서 $BD:DC=3:2$, $AE:EC=3:4$, M은 AD와 BE의 사귐점이고 $\triangle ABC$의 면적은 1이다. 그러면 $\triangle BMD$의 면적은 ______이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 그림의 제형 $ABCD$에서 $AB//CD$, $AB>CD$이다. K, M은 각각 AD, CB우의 점들이고 $\angle DAM=\angle CBK$이다. $\angle DMA=\angle CKB$임을 증명하시오.

2. 실수 a, b, c는 $a+b+c=2$를 만족시킨다. 그리고 임의의 실수 x에 대하여 $-x^2+2x\le ab+bc+ca\le 9x^2-18x+10$을 만족시킨다. 그러면 a, b, c는 모두 $\dfrac{4}{3}$보다 크지 않은 부아닌 수라는것을 증명하시오.

3. AB와 CD는 각각 단위원의 직경과 활줄이고 $AB \perp CD$, $\overset{\frown}{BC} = 2\overset{\frown}{AD}$, E는 BD의 가운데점이다. AE와 CD는 점 P에서 사귀고 AE의 연장선과 원둘레는 F에서 사귀며 CF와 AB는 Q에서 사귄다. 4각형 $ACQP$의 면적을 구하시오.

시 험 43

Ⅰ. 선택문제

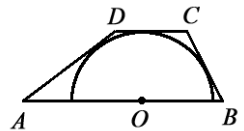
1. $0 < a < 1$일 때 $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}-2} \div \left(1+\frac{1}{a}\right) \times \frac{1}{1+a}$을 간단히 하면 (　　)이다.

(ㄱ) $\frac{1-a}{1+a}$,　(ㄴ) $\frac{a-1}{a+1}$,　(ㄷ) $1-a^2$,　(ㄹ) a^2-1

2. a, b, c는 서로 다른 임의의 실수이다. $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$, $z=c^2-ab$일 때 x, y, z는 (　　)이다.

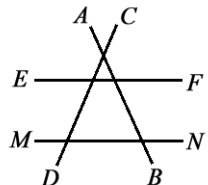
(ㄱ) 모두 0보다 작지 않다　(ㄴ) 모두 0보다 크지 않다

(ㄷ) 적어도 하나는 0보다 작다 (ㄹ) 적어도 하나는 0보다 크다

3. 반원 O의 직경은 제형 $ABCD$의 밑변 AB우에 놓여있고 반원둘레는 나머지변들과 접한다. 만일 $BC=2$, $DA=3$이면 AB의 길이는 (　　)이다.

(ㄱ) 4 (ㄴ) 5 (ㄷ) 6 (ㄹ) 확정할수 없다

4. $x=\frac{1+\sqrt{1994}}{2}$일 때 다항식 $(4x^3-1997x-1994)^{2001}$의 값은 (　　)이다.

(ㄱ) 1　(ㄴ) -1　(ㄷ) 2^{2001}　(ㄹ) -2^{2001}

5. 평행인 두 직선 EF, MN과 직선 AB, CD가 그림과 같이 서로 사귀고있다. 내각이 같은 쌍은 모두 (　　)개이다.

(ㄱ) 4　(ㄴ) 8　(ㄷ) 12　(ㄹ) 16

6. 만일 방정식 $\sqrt{x-p}=x$가 두개의 서로 다른 풀이를 가진다면 실수 p의 값범위는 (　　)이다.

(ㄱ) $p\le 0$　(ㄴ) $p<\frac{1}{4}$　(ㄷ) $0\le p<\frac{1}{4}$　(ㄹ) $p\ge\frac{1}{4}$

Ⅱ. 채우기문제

1. x에 관한 항등식 $\frac{Mx+N}{x^2+x-2}=\frac{2}{x+a}-\frac{c}{x+b}$에서 $\frac{Mx+N}{x^2+x-2}$은 다 약분된 분수식이고 $a>b, a+b=c$이면 $N=$_____이다.

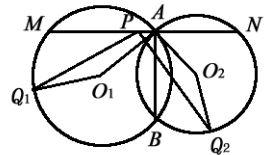
2. $|x+1|\le 6$일 때 함수 $y=x|x|-2x+1$의 최대값은 _____이다.

3. PAB, PCD는 원 O의 두 분할선이고 $PA=8, AB=10, CD=7, \angle P=60°$이다. 원 O의 반경은 _____이다.

4. 두개의 반경이 5이고 하나의 반경이 8인 원형종이장들이 책상우에 놓여있는데 그것들은 서로 외접되여있다. 만일 한개의 큰 원형종이장으로 이 3개의 원형종이장을 덮는다면 이 큰 원형종이장의 최소반경은 _____과 같다.

Ⅲ. 풀이문제

1. $y=x^2+ax+3$에서 $-2<x<2$일 때 $y\ge a$가 항상 성립한다. a의 값범위를 구하시오.

2. 원 O_1와 원 O_2은 두점 A, B에서 사귄다. 직선 MN은 A에서 AB에 수직이고 두 원 O_1, O_2과 각각 점 M, N에서 사귄다. 선분 MN의 가운데점이 P, $\angle AO_1Q_1=\angle AO_2Q_2$일 때 $PQ_1=PQ_2$임을 증명하시오.

3. 어떤 자연수 n에 대하여 $2n+1$과 $3n+1$은 모두 완전두제곱수이다.

① n은 40으로 완제된다는것을 증명하시오.

② $5n+3$이 씨수로 될수 있는가?

시 험 44

Ⅰ. 선택문제

1. $a=3^{55}$, $b=4^{44}$, $c=5^{33}$이면 (　　)이다.

(ㄱ) $a<b<c$　(ㄴ) $c<b<a$　(ㄷ) $c<a<b$　(ㄹ) $a<c<b$

2. 련립방정식 $\begin{cases} xy+yz=63 \\ xz+yz=23 \end{cases}$의 정의옹근수풀이의 개수는 (　　) 이다.

(ㄱ) 1　(ㄴ) 2　(ㄷ) 3　(ㄹ) 4

3. 방정식 $(x-1)(x^2-2x+m)=0$의 세 풀이는 어떤 한 3각형의 세변의 길이를 만들수 있다. 이때 실수 m의 값범위는 (　　)이다.

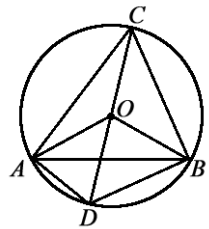
(ㄱ) $0\le m\le 1$ (ㄴ) $m\ge\frac{3}{4}$ (ㄷ) $\frac{3}{4}<m\le 1$ (ㄹ) $\frac{3}{4}\le m\le 1$

4. 만일 변의 길이가 차례로 25, 39, 52, 60인 4각형이 원에 내접하면 이 원의 둘레의 길이는 (　　)이다.

(ㄱ) 62π　(ㄴ) 63π　(ㄷ) 64π　(ㄹ) 65π

5. AB는 원 O의 한 활줄, CD는 원 O의 직경이고 활줄 AB와 서로 사귄다. $M=|S_{\Delta CAB}-S_{\Delta DAB}|$, $N=2S_{\Delta OAB}$이면 (　　)이다.

(ㄱ) $M>N$　(ㄴ) $M=N$　(ㄷ) $M<N$

(ㄹ) M, N의 크기는 확정할수 없다

6. 실수 a, b가 부등식 $\left||a|-(a+b)\right|<\left|a-|a+b|\right|$를 만족시키면 ( )이다.

(ㄱ) $a>0$이고 $b>0$, (ㄴ) $a<0$이고 $b>0$,

(ㄷ) $a>0$이고 $b<0$,　(ㄹ) $a<0$이고 $b<0$,

Ⅱ. 채우기문제

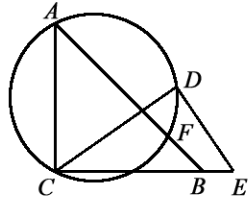
1. 95개의 수 $1^2, 2^2, 3^2, \cdots 95^2$가운데서 십의 자리수가 홀수인것은 모두 _____개이다.

2. a가 방정식 $x^2+x-\frac{1}{4}$의 풀이일 때 $\frac{a^3-1}{a^5+a^4-a^3-a^2}$의 값은 _____과 같다.

3. x가 정의실수일 때 함수 $y=x^2-x+\frac{1}{x}$의 최소값은 ____이다.

4. 선분 AB를 직경으로 하는 한개의 반원을 그리고 그 중심을 O라고 하자. C가 반원둘레의 점이고 $OC^2=AC\cdot BC$이면 $\angle CAB=$ _____이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. $\angle ACE=\angle CDE=90^\circ$, 점 B는 CE우의 점, $CA=CB=CD$, 세점 A, C, D를 지나는 원이 AB와 점 F에서 사귄다(그림). F가 $\triangle CDE$의 내심이라는것을 증명하시오.

2. 자리표평면에서 가로, 세로자리표가 모두 옹근수인 점을 옹근수점이라고 부른다. 2차함수 $y=\frac{x^2}{10}-\frac{x}{10}+\frac{9}{5}$의 그라프에서 $y\le|x|$를 만족시키는 옹근수점 (x, y)를 찾고 그 리유를 설명하시오.

3. 6보다 큰 모든 자연수 n은 1보다 큰 두개의 서로 다른 씨수의 자연수들의 합으로 표시될수 있다는것을 증명하시오.

시 험 45

Ⅰ. 선택문제

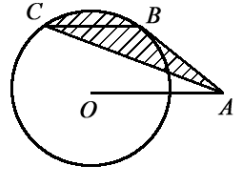
1. 실수 a, b는 $ab=1$을 만족시킨다. $M=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$, $N=\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$이면 M, N사이의 관계는 (　　)이다.

(ㄱ) $M>N$　(ㄴ) $M=N$　(ㄷ) $M<N$　(ㄹ) 확정할수 없다

2. 정의옹근수 a, m, n은 $\sqrt{a^2-4\sqrt{2}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$을 만족시킨다. 그러면 이런 모양으로 취할수 있는 a, m, n의 값은 ( )이다.

(ㄱ) 1조 (ㄴ) 2조 (ㄷ) 2조보다 많다 (ㄹ) 존재하지 않는다

3. 그림에서 A는 반경이 1인 원 O밖의 한점이고 $OA=2$, AB는 원 O의 접선, B는 접점, 활줄 BC는 OA에 평행이다. AC를 맺으면 빗선친 부분의 면적은 ( )과 같다.

(ㄱ) $\frac{2\pi}{9}$ (ㄴ) $\frac{\pi}{6}$

(ㄷ) $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}$ (ㄹ) $\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}$

4. x_1, x_2이 2차방정식 $x^2+x-3=0$의 두 풀이일 때 $x_1^3-4x_2^2+19$의 값은 ( )과 같다

(ㄱ) -4 (ㄴ) 8 (ㄷ) 6 (ㄹ) 0

5. 한 3각형의 면적과 둘레의 길이가 모두 한 직선에 의하여 2등분되면 이 직선은 반드시 이 3각형의 ( )를 지난다.

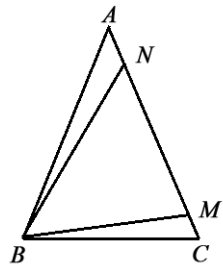
(ㄱ)내심 (ㄴ) 외심 (ㄷ) 무게중심 (ㄹ)수심

6. 20개의 점이 원둘레를 20등분하였다. 정점을 이 20개의 점들가운데서 취하여 얻어지는 바른다각형의 개수는 ( )이다.

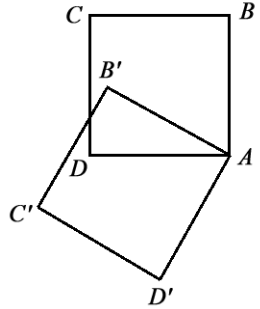
(ㄱ) 4개 (ㄴ) 8개 (ㄷ) 12개 (ㄹ) 24개

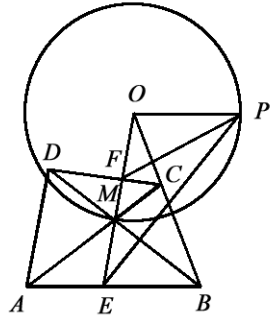
Ⅱ. 채우기문제

1. 실수 x_0, y_0이 련립방정식 $\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ y=|x|+1 \end{cases}$ 의 풀이일 때 $x_0+y_0=$_____이다.

2. $\triangle ABC$에서 $AB=AC$, $\angle ABN=\angle MBC$, $BM=NM$, $BN=a$이면 점 N에서 변 BC까지의 거리는 ______과 같다.

3. $1995x^3=1996y^3=1997z^3$, x, y, $z>0$이고 $\sqrt[3]{1995x^2+1996y^2+1997z^2}=$

$= \sqrt[3]{1995} + \sqrt[3]{1996} + \sqrt[3]{1997}$ 이면 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=$_____ 이다.

4. 그림에서 한변의 길이가 1인 바른4각형 $ABCD$를 점 A를 중심으로 $60°$회전시켜 $AB'C'D'$의 위치까지 옮겨놓으면 두개의 바른4각형에서 겹친부분의 면적은 _____이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. A반과 B반에서 수학문제풀이를 하는데 A반의 남학생 m명과 녀학생 11명이 푼 문제수가 B반의 9명의 남학생과 n명의 녀학생이 푼 문제수와 같다. 그리고 문제의 총수는 $m \cdot n+9m+11n+145$이다. 매 사람의 문제수는 같고 옹근수이다. 매 사람의 문제수를 구하시오.

2. 볼록4각형 $ABCD$의 대각선 AC와 BD의 사귐점은 M이다. M을 지나며 AD에 평행인 선분이 AB, CD와 사귀는 점을 각각 E, F라고 하자. BC의 연장선은 점 O에서 사귀며 점 O를 중심으로 반경이 OM인 원둘레의 한점을 P라고 하면 $\angle OPF = \angle OEP$임을 증명하시오.

3. a, b, c는 모두 정의옹근수이고 포물선 $y=ax^2+bx+c$와 x축은 두개의 서로 다른 점 A, B에서 사귄다. 만일 A, B에서부터 원점까지의 거리가 모두 1보다 작을 때 $a+b+c$의 최소값을 구하시오.

시 험 46

Ⅰ. 선택문제

1. a가 실수이고 방정식 $x^2-2\sqrt{-a}x+\dfrac{(a-1)^2}{4}=0$이 실수풀이를 가지면 $a^{1996}+a^{1997}$의 값은 (　　)이다.

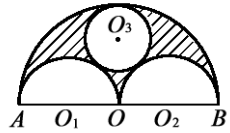
(ㄱ) -2 (ㄴ)0 (ㄷ)2 (ㄹ) 확정할수 없다

2. 2등변3각형의 한변의 가운데선의 길이가 7.5이고 정각의 2등분선의 길이가 9이면 이 3각형의 면적은 ( )이다.

(ㄱ) 31.5 (ㄴ) 36 (ㄷ) 54 (ㄹ) 67.5

3. 2차함수 $y=(a+b)x^2+2cx-(a-b)$에서 a, b, c는 $\triangle ABC$의 세변의 길이이고 $b\geq a, b\geq c$이다. $x=-\frac{1}{2}$에서 이 함수가 최소값 $-\frac{a}{2}$를 가진다면 a, b, c의 크기관계는 ( )이다.

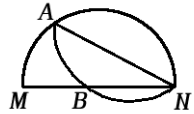
(ㄱ) $b\geq a>c$, (ㄴ) $b\geq c>a$, (ㄷ) $a=b=c$, (ㄹ)확정할수 없다

4. 그림에서 원과 3개의 반원이 모두 접한다. 두개의 작은 반원의 반경이 모두 1이고 큰 반원과 서로 겹쳤다. 이때 빗선친 부분의 면적은 모두 ( )이다.

(ㄱ) $\frac{\pi}{2}$, (ㄴ) $\frac{4\pi}{9}$, (ㄷ) π, (ㄹ) $\frac{5\pi}{9}$

5. 식 $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-1997|$이 최소값을 가질 때 실수 x의 값은 ( )와 같다.

(ㄱ) 999 (ㄴ) 998 (ㄷ) 1997 (ㄹ) 0

6. 반원의 한 활줄 AN을 대칭축으로 하여 $\overset{\frown}{AN}$을 대칭이동하였더니 직경 MN과 B에서 사귀였다. 만일 $MB:BN=2:3$이고 $MN=10$이면 활줄 AN의 길이는 ( )이다.

(ㄱ) $3\sqrt{5}$ (ㄴ) $4\sqrt{5}$ (ㄷ) $4\sqrt{3}$ (ㄹ) $5\sqrt{3}$

Ⅱ. 채우기문제

1. $\sqrt{2}+1$과 $\sqrt{2}-1$이 방정식 $x^4+ax^2+b=0$의 두 풀이일 때 방정식 $ax^2+bx+1=0$의 풀이는 ______이다.

2. 네변의 길이가 각각 1, 4, 4, 5인 제형들가운데서 그 면적이 최소인 제형의 두 대각선의 합은 ______과 같다

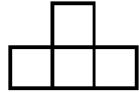
3. 임의의 실수 x에 대하여 2차3항식 $k^{-3}-x-k^2x^2$의 값의 부호가 변하지 않을 때 k의 값범위는 ______과 같다.

4. 볼록다각형의 내각은 모두 옹근수이고 그중 하나는 81°이다. 나머지 내각들은 크기가 모두 같다. 이런 다각형은 모두 ___개 있다.

Ⅲ. 풀이문제

1. $\overset{\frown}{A_1A_2}\cdots A_{n-1}A_n$은 원에 내접한 바른$n$각형이다. P는 활등 $A_{n-2}A_{n-1}A_n$과 다른활등 $\overset{\frown}{A_nA_{n-2}}$사이에 있는 점이다. $\dfrac{PA_{n-2}+PA_n}{PA_{n-1}}$의 값을 구하시오.

2. a, b, c를 세변으로 하는 직3각형의 둘레의 길이와 면적의 수값이 같고 a, b, c는 자연수이다. x에 관한 방정식 $x^2-(a+b+c)x+abc=0$은 실수풀이를 가지지 않는다는것을 증명하시오.

3. 정의옹근수 1, 2, 3, ⋯, 64를 8×8인 바른4각형의 64개 칸에 그림모양으로 채우는데 방향은 임의로 할수 있다. 임의의 4개칸에 있는 수들의 합이 항상 5로 완제되게 배치할수 있겠는가? 그 리유를 설명하시오.

시 험 47

Ⅰ. 선택문제

1. $\sqrt{x-y}$, $\sqrt{y-z}$, $\sqrt{z-x}$ 들모두가 의미를 가지는 실수값조(x, y, z)는 (　　)이다.

(ㄱ) 존재하며 무한개조 있다 (ㄴ) 유한개조 존재한다

(ㄷ) 존재하지 않는다 (ㄹ)존재를 확정할수 없다

2. $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=k$ 이면 직선 $y=kx+k$의 그라프는 반드시 (　　)을 지난다.

(ㄱ) 1, 2, 3사분구 (ㄴ) 2,3사분구 (ㄷ) 2, 3, 4사분구 (ㄹ)우의것들을 확정할수 없다

3. 다음의 4개의 명제가 있다.

① 두 실수의 합과 적이 모두 홀수이면 이 두수는 모두 홀수이다.

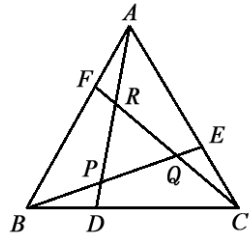
② 두 실수의 합과 적이 모두 짝수이면 이 두수는 모두 짝수이다.

③ 두 실수의 합과 적이 모두 유리수이면 이 두수는 모두 유리수이다.

④ 두 실수의 합과 적이 모두 무리수이면 이 두수는 모두 무리수이다.

이 중에서 정확한 명제는 (　　　)개이다.

(ㄱ) 0　　(ㄴ) 1　　(ㄷ) 2　　(ㄹ) 3

4. 그림에서 점 D, E, F는 바른3각형 ABC의 세변 AB, BC, CA를 모두 $1:2$로 되는 두개의 부분으로 나눈다. 또한 AD, BE, CF는 서로 사귀여 $\triangle PQR$를 만든다. $\triangle PQR$의 면적은 $\triangle ABC$의 면적의 (　　)이다.

(ㄱ) $\frac{1}{10}$　　(ㄴ) $\frac{1}{9}$　　(ㄷ) $\frac{1}{8}$　　(ㄹ) $\frac{1}{7}$

5. $\triangle ABC$의 변의 길이는 a, b, c이고 그 외접원의 면적은 S이다. $\triangle A'B'C'$의 변의 길이는 a', b', c'이고 그 외접원의 면적은 S'이다. $a < a', b < b', c < c'$이면 S와 S'의 크기관계는 (　　)이다.

(ㄱ) $S < S'$　(ㄴ) $S = S'$　(ㄷ) $S > S'$　(ㄹ) 확정할수 없다

6. a, b, c는 실수이고 $a^2 - bc - 8a + 7 = 0, b^2 + c^2 + bc - 6a + 6 = 0$이면 a의 값범위는 (　　)이다.

(ㄱ) 모든 실수　　(ㄴ) $a > 1$　(ㄷ) $1 < a < 13$　(ㄹ) $1 \le a \le 9$

Ⅱ. 채우기문제

1. $ABCD$는 한변의 길이가 1인 바른4각형이다. M은 AB우의 점이고 $AM:MB = 1:2$, N은 AD우의 점이고 $AN:ND = 2:1$이다. 이제 바른4각형 $ABCD$에 외접한 바른4각형을 $A'B'C'D'$라고 하고 네개 변이 각각 A, B, C, D를 지나며 $A'D' // MN$이 되게 그리자. 그러면 바른4각형 $A'B'C'D'$의 면적은 _____이다.

2. $a_1, a_2, \cdots, a_k$는 R개의 서로 다른 정의옹근수이고 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1997$일 때 k의 최대값은 _____이다.

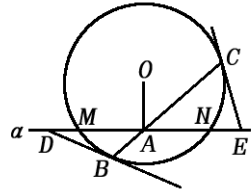
3. $\frac{x}{x^2 + x + 1} = a\ (a \ne 0)$이면 $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} =$ ____이다.

4. $\triangle ABC$에서 a, b, c는 각각 $\angle A, \angle B, \angle C$의 맞은변이고

$a=15$, $b=17$, $\angle A$는 정해진 값이다. 만일 이런 조건을 만족시키는 3각형의 $\angle C$가 유일하게 존재한다면 $\tan C$의 값은 _____과 같다.

Ⅲ. 풀이문제

1. $x^2-px+q=0$의 두 실수풀이는 α, β이다. 만일 α^3, β^3을 풀이로 하는 1원2차방정식도 역시 $x^2-px+q=0$이라면 이런 1원2차방정식을 구하시오.

2. 직선 a는 원 O와 점 M, N에서 사귀고 점O에서 직선 a에 그은 수직선의 밑점을 A라고 하자. A를 지나는 활줄 BC, BD는 원 O와 B에 접하며 직선 a와 점 D에서 사귄다. 또한 CE는 원 O와 C에서 접하며 직선 a와 점 E에서 사귄다. $DM=EN$임을 증명하시오.

3. $1 \le x \le 5$일 때 부등식 $\left|x^2+px+q\right| \le 2$이 항상 성립되는 실수 p, q의 값을 구하시오.

시 험 48

Ⅰ. 선택문제

1. a, b, c는 모두 실수이고 $a \ne 0$, $a+b=-2c$이면 방정식 $ax^2+bx+c=0$은 (　　)이다.

(ㄱ) 두개의 정수풀이를 가진다

(ㄴ) 적어도 하나의 정수풀이를 가진다

(ㄷ) 하나의 정수풀이만 가진다

(ㄹ) 정수풀이가 없다

2. a, b는 모두 자연수이고 $123456789=(11111+a)(11111-b)$이면 (　　).

(ㄱ) $a-b$는 홀수이다 (ㄴ) $a-b$는 4의 배수이다

(ㄷ) $a-b$는 2의 배수이지만 꼭 4의 배수로는 되지 않는다

(ㄹ) $a-b$는 2의 배수이지만 4의 배수는 아니다

3. 함수 $y=ax^2+bx+c(a\ne0)$의 그라프를 y축주위로 180° 회전시키고 다시 x축주위로 180° 회전시켜 얻은 함수의 해석식은 (　　)이다.

(ㄱ) $y=-ax^2+bx-c$　(ㄴ) $y=-ax^2-bx-c$

(ㄷ) $y=ax^2-bx-c$　　(ㄹ) $y=-ax^2+bx+c$

4. 직3각형에서 세변은 모두 200이하의 정의옹근수이고 긴 두 변의 차가 1이면 이런 직3각형은 (　)개 있다.

(ㄱ)12　(ㄴ) 9　(ㄷ) 6　(ㄹ) 1

5. 한 직선이 $\triangle ABC$의 내심을 지나고 3각형의 둘레의 길이를 2등분한다. 이 직선에 의하여 나누어진 두 도형의 면적의 비는 (　　)이다.

(ㄱ) 2:1　　(ㄴ) 1: 1　　(ㄷ) 2: 3　　(ㄹ) 3: 1

6. M은 $\overset{\frown}{ABC}$의 가운데점이고 활줄 $BC > AB$이며 F에 관하여 $MF \perp BC$이다. 그러면 (　　)이다.

(ㄱ) $AB+BF=FC$　　(ㄴ) $AB+BF > FC$

(ㄷ) $AB+BF < FC$　　(ㄹ) 우의 세가지 경우가 다 가능하다

Ⅱ. 채우기문제

1. x와 $\sqrt{-2x-\sqrt{2}}+\sqrt{x+1}$이 모두 실수일 때 식 $\sqrt{1+2x\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}}$을 간단히 하면 _____이다.

2. 어떤 하나의 3각형에서 두 내각의 합이 n^0이고 제일 큰 각과 제일 작은 각의 차가 24°이다. 이때 n의 값범위는 ______이다.

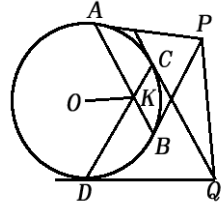
3. $a \neq 0$이고 $b^2-4ac \geq 0$일 때 $a^2\left(\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^4+(2ac-b^2)\left(\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2+c^2$을 간단히 하면 ____이다.

4. 실수 x, y가 $2x^2+y^2=bx$를 만족시키면 x^2+y^2+2x의 최대값은 ______이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. a가 정의옹근수이고 방정식 $ax^2+(4a-2)x+4a-7=0$은 적어도 하나의 옹근수풀이를 가진다. 이때 a의 값을 구하시오.

2. 함수 $y=x^2-4x+10+\left(\sqrt{6}-\sqrt{x^2-x-6}\right)^0$의 최소값을 구하시오.

3. 원 O의 활줄 AB와 CD는 서로 점 K에서 사귄다. 활줄 AB, CD의 두 끝점들에서 그은 접선들은 각각 P, Q에서 사귄다. 이때 $OK\perp PQ$임을 증명하시오.

시 험 49

Ⅰ. 선택문제

1. $a > b > 0$이고 $a^2+b^2-3ab=0$일 때 $\dfrac{a+b}{a-b}$의 값은 (　　)이다.

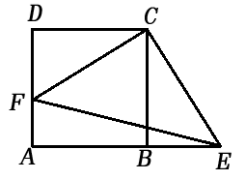
(ㄱ) $\sqrt{2}$　　(ㄴ) $\sqrt{3}$　　(ㄷ) 2　　(ㄹ) $\sqrt{5}$

2. x_1, x_2이 방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2+2=0$의 두개의 실수풀이이고 $(x_1+1)(x_2+1)=8$일 때 k의 값은 (　　)이다.

(ㄱ) -3 또는 1　　(ㄴ) -3

(ㄷ) 1　　(ㄹ) $\dfrac{1}{2}$보다 크거나 같다

3. 바른4각형 $ABCD$의 면적은 256이고 점 F는 AD우의 한점, 점 E는 AB의 연장선우의 한 점일 때 직3각형CEF의 면적이 200이라면 BE의 길이는 (　　)이다.

(ㄱ) 10　　(ㄴ) 11　　(ㄷ) 12　　(ㄹ) 15

4. a, b, c가 서로 다른 실수이고 $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$, $z=c^2-ab$이면 x, y, z는 (　　)이다.

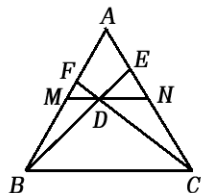
(ㄱ) 모두 0보다 작지 않다

(ㄴ) 모두 0보다 크지 않다

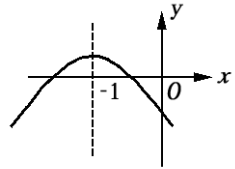
(ㄷ) 적어도 하나는 0보다 작다

(ㄹ) 적어도 하나는 0보다 크다

5. 바른3각형 ABC의 변의 길이는 a이고 M,N은 각각 AB, AC의 가운데점, D는 MN우의 임의의 한점, BD, CD의 연장선이 AC, AB와 사귀는 점을 각각 E, F라고 하면 $\dfrac{1}{CE}+\dfrac{1}{BF}$의 값

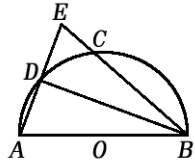
은 (   )이다.

(ㄱ) $\frac{1}{a}$ (ㄴ) $\frac{2}{a}$ (ㄷ) $\frac{3}{a}$ (ㄹ) D의 위치에 따라 변한다

6. 2차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그라프는 그림과 같다. 아래의 5개 식 abc, $a+b+c$, $a-b+c$, $2a-b$, $9a-4b$중에서 값이 부수인 식은 (   )이다.

(ㄱ) 4개 (ㄴ) 3개 (ㄷ) 2개 (ㄹ) 1개

Ⅱ. 채우기문제

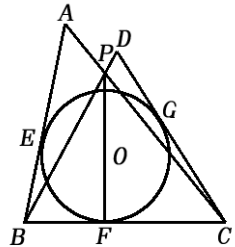
1. 방정식 $y^4+2x^4+1=4x^2y$의 옹근수풀이쌍(x, y)는 모두 ____개이다.

2. 어떤 네자리수가 있다. 이것을 첫 두개 수자로 이루어진 두자리수와 다음의 두개 수자로 이루어진 두 자리수로 만들었다. 이 두개 수에 대하여 첫 두자리수에는 마지막자리에 0을 붙이고 거기에 두개의 두자리수의 적을 더하면 꼭 원래의 네자리수가 된다. 그리고 원래수의 일의 자리수자는 5이다. 이 네자리수는 ____이다.

3. 그림에서 AB는 반원 O의 직경이고 $AB=4$, 활줄 $BC=3$, $\angle ABC$의 2등분선이 반원과 D에서 사귀며 AD와 BC의 연장선은 점 E에서 사귄다. $\triangle CDE$의 면적과 4각형 $ABCD$의 면적의 비는 ___이다.

4. 방정식 $\left|x^2-5x\right|=a$는 두개의 서로 다른 실수풀이만을 가진다. 그러면 a가 취할수 있는 값범위는 _____이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 함수 $y=(1-m^2)x^2+2mx-1$의 그라프와 x축의 사귐점의 가로자리표는 모두 1보다 작은 정수이다. m이 취할수 있는 값범위를 구하시오.

2. 그림에서 AB, BC, CD는 각각 원 O와 점 E, F, G에서 접하고 $AB=BC=CD$이다. AC, BD가 점 P에서 서로 사귈 때 $PF\perp BC$임을 증명하시오.

3. 어떤 하나의 자연수의 매 자리수자들의 합과 매 자리수자들의 적의 합이 꼭 이 자연수와 같아지는 이런 자연수들모두의 합을 구하시오.

시 험 50

Ⅰ. 선택문제

1. a가 1997의 2차뿌리의 옹근수부, b가 1991의 2차뿌리의 소수부이면 $\dfrac{\sqrt{a}}{(\sqrt{181}+4\sqrt{11})b}$를 간단히 한 결과는 (　　)이다.

(ㄱ) $\frac{1}{5}$　(ㄴ) $\frac{1}{4}$　(ㄷ) $\frac{2}{5}$　(ㄹ) $\frac{2}{11}$

2. DE는 $\triangle ABC$에서 AC에 평행인 가운데선, F는 DE의 가운데점, AF의 연장선과 BC는 G에서 사귄다. 그러면 $\triangle ABG$와 $\triangle ACG$의 면적의 비는 ______이다.

(ㄱ) 1: 2　(ㄴ) 2: 3　(ㄷ) 3: 5　(ㄹ) 4:7

3. 1차함수 $y=\dfrac{1-kx}{k+1}$ (R는 자연수이며 상수)의 그라프와 두 자리표축으로 이루어진 도형의 면적을 S_k라고 하면 $S_1+S_2+\cdots+S_{100}$의 값은 (　　)이다.

(ㄱ) 50　(ㄴ) 101　(ㄷ) $\frac{101}{50}$　(ㄹ) $\frac{50}{101}$

4. $0° < \alpha < 30°$이면 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$의 크기관계는 (　)이다.

(ㄱ) $\sin\alpha < \cos\alpha < \tan\alpha < \cot\alpha$

(ㄴ) $\sin\alpha < \tan\alpha < \cos\alpha < \cot\alpha$

(ㄷ) $\tan\alpha < \sin\alpha < \cos\alpha < \cot\alpha$

(ㄹ) 우의 답이 모두 틀린다

5. 3각형의 세 높이가 각각 3, 4, 5이다. 그러면 이 3각형은 (　　)이다.

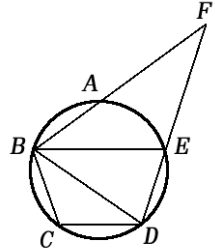
(ㄱ) 뾰족3각형,　(ㄴ) 직3각형,

(ㄷ) 무딘3각형,　(ㄹ) 형태를 확정할수 없다

6. x에 관한 방정식 $x^2+mx+m+2=0$은 서로 다른 실수풀이를 가진다. m이 옹근수이고 하나의 실수풀이의 옹근수부가 2이면 m의 값은 (　　)이다.

(ㄱ) -2 (ㄴ) -3 (ㄷ) -2 또는 -3 (ㄹ) 존재하지 않는다

Ⅱ. 채우기문제

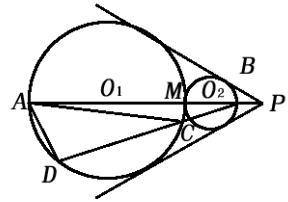
1. 그림에서 5개의 점 A, B, C, D, E가 한원에 놓인다. $AB=BC=CD=DE$이고 $\angle BFD=30°$이면 $\angle DBE$의 크기는 ____도이다.

2. 3개의 2차방정식 $x^2+4mx-4m+3=0$, $x^2+(m-1)x+m^2=0$, $x^2+2mx-2m=0$중에서 적어도 하나의 방정식은 두개의 실수풀이를 가진다. 그러면 m이 취할수 있는 값범위는 _____이다.

3. 정의옹근수 x, y, z가 같기식 $\sqrt{2}(3y^2z+2z^2-x)+y(y^2+6z^2)=20$을 만족시키면 $x+y+z$의 값은 ____이다.

4. 길이가 12, 너비가 5인 직4각형종이를 대각선을 따라 접어서 책상우에 놓았다. 그러면 종이가 덮은 책상의 면적은 _____이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. x, y가 실수이고 $x^2+xy+y^2=3$일 때 x^2-xy+y^2의 최대값과 최소값을 구하시오.

2. 그림에서 원 O_1와 O_2은 점 M에서 외접하고 그 두 원의 공통외접선사이의 각은 $60°$이다. 중심선은 원 O_1, O_2과 각각 A, B에서 사귀고(M과 다른 점) B를 지나는 직선이 원 O_1와 두점 C, D에서 사귄다. $\cot\angle BAC$, $\cot\angle BAD$의 값을 구하시오.

3. 자연수 a는 몇개의 같은수 x로 이루어지고 b는 n개의 같은수 y로 이루어지며 c는 $2n$개의 같은수 z로 이루어졌다. 임의의 자연수 n $(n\geq 2)$에 대하여 $a^2+b=c$에 맞는 수 x, y, z를 구하시오.

시 험 51

Ⅰ. 선택문제

1. $x^3+x^2+x+1=0$이면 $x^{97}+x^{98}+\cdots+x^{103}$의 값은 ( )이다.

(ㄱ) -1 (ㄴ) 0 (ㄷ) 1 (ㄹ) 2

2. 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7}$의 정의옹근수풀이의 개수는 ( )이다.

(ㄱ) 0 (ㄴ) 1 (ㄷ) 2 (ㄹ) 3

3. $\triangle ABC$에 대하여 다음의 조건이 있다.

(1) 두 가운데선이 같다; (2) 두 높이가 같다; (3) $\cos C=\cos B$; (4) $\tan C=\tan B$이 가운데서 $\triangle ABC$가 2등변3각형이라는 것을 보여주는 조건은 ( )이다.

(ㄱ) 1개 (ㄴ) 2개 (ㄷ) 3개 (ㄹ) 4개

4. 제형 $ABCD$에서 $AB//CD, AB=3CD, E$는 대각선 AC의 가운데점이고 직선 BE와 AD가 F에서 사귀면 $AF:FD$의 값은 ( ) 이다.

(ㄱ) 2 (ㄴ) $\frac{5}{3}$ (ㄷ) $\frac{3}{2}$ (ㄹ) 1

5. 등변4각형의 둘레길이가 20이고 두 대각선의 길이는 방정식 $x^2-(2m-1)x+4m-4=0$의 두 풀이이다. 이때 m의 값은 ( )이다.

(ㄱ) $\frac{13}{2}$ (ㄴ) $-\frac{7}{2}$ (ㄷ) $\frac{13}{2}$ 또는 $-\frac{7}{2}$

(ㄹ) 우의 답이 모두 틀린다

6. $\triangle ABC$에서 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$의 맞은변은 각각 a, b, c이다. $a^2=b(b+c)$, $\angle c$가 무딘각일 때 $a, 2b, c$의 크기관계는 ( )이다.

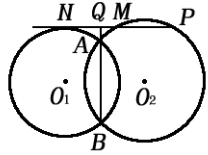
(ㄱ) $a<2b<c$ (ㄴ) $a<c<2b$ (ㄷ) $2b<a<c$ (ㄹ) $a=2b<c$

Ⅱ. 채우기문제

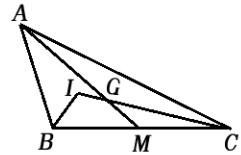
1. 5개의 수 a, b, c, d, e에서 서로 두개의 합이 각각 183, 186, 187, 190, 191, 192, 193, 194, 196, 200이다. $a<b<c<d<e$일 때 d의 값은 ______이다.

2. 직4각형종이 $ABCD$에서 $AB=6$, $BC=8$이다. 이것을 접어서 C와 A를 일치시키면 접힌자리 EF의 길이는 _____이다.

3. $ab \neq 1$이고 $5a^2+1999a+8=0$과 $8b^2+1999b+5=0$이면 $a:b$의 값은 ______이다.

4. 그림에서 원O_1와 O_2은 A, B에서 서로 사귀고 P는 원O_2의 한점, PN은 N에서 원 O_1와 접하고 원 O_2과 M에서 사귀며 BA의 연장선과 Q에서 사귄다. 그리고 M은 PN의 가운데점이다. $MQ=12$일 때 PN의 길이는 _____이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 3개의 방정식 $x^2+4mx+4m^2+2m+3=0$, $x^2+(2m+1)x+m^2=0$, $(m-1)x^2+2mx+m-1=0$가운데서 적어도 한개의 방정식은 실수풀이를 가진다. m이 취할수 있는 값범위를 구하시오.

2. 그림의 $\triangle ABC$에서 $\angle ABC$와 $\angle ACB$의 2등분선은 I에서 사귀고 AM은 변 BC의 가운데선, G는 AM우의 한점, $AG:GM=2:1$이고 $IG // BC$이다. $AB+AC=2BC$임을 증명하시오.

3. a, b는 모두 실수이고 $a^3+b^3=2$이다. $a+b$의 최대값을 구하시오.

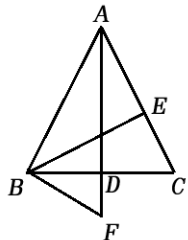
시 험 52

Ⅰ. 선택문제

1. $x-y=a$, $z-y=10$일 때 대수식 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$의 최소값은 (　　)이다.

(ㄱ) 75　　(ㄴ) 80　　(ㄷ) 100　　(ㄹ) 105

2. $\triangle ABC$에서 $AB=AC$, AD가 $\angle BAC$의 2등분선, B에서 AC에 그은 수직선의 밑점을 E, $BE=8$, $AE=6$, F는 AD의 연장선우의 한점, $\angle BFA=60^\circ$이다. 그러면 BF의 길이는 (　　)이다.

(ㄱ) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$　(ㄴ) $2\sqrt{5}$　(ㄷ) $\frac{4\sqrt{5}}{3}$　(ㄹ) $\sqrt{15}$

3. 2차함수 $y=-x^2+px+q$의 그라프는 x축과 두점 $(a,0)$과 $(b, 0)$에서 사귀고 $b<1<a$이다. 그러면 ( )이다.

(ㄱ) $p+q>1$ (ㄴ) $p+q=1$ (ㄷ) $p+q<1$ (ㄹ) $pq>0$

4. 어떤 두자리수의 두개 수자가운데에 한개 수자를 끼워 세자리수를 만들었는데 원래 두자리수의 9배가 되였다. 이런 두자리수는 ( )개이다.

(ㄱ) 1 (ㄴ) 4 (ㄷ) 10 (ㄹ) 10개이상

5. $\triangle ABC$에서 $BC=a$, $AC=b$, $AB=C$이고 M과 I는 각각 $\triangle ABC$의 무게중심과 내심이다. $MI//BC$이면 a, b, c사이의 관계는 ( )이다.

(ㄱ) $b+c>2a$ (ㄴ) $b+c<2a$

(ㄷ) $b+c=2a$ (ㄹ) 우의 세가지 경우가 모두 가능하다

6. 원 O와 O'는 두점 A, B에서 서로 사귀고 매 원은 각각 다른 원의 중심을 지난다. B를 지나는 가름선은 원 O, O'와 각각 점 M, N에서 사귄다. M을 지나는 원 O외접선과 N점을 지나는 원 O'의 접선은 C에서 사귄다. 그러면 $\angle MCN$의 크기는 ( )이다.

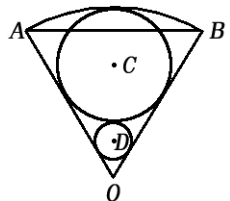
(ㄱ) 60° (ㄴ) 120° (ㄷ) 135° (ㄹ) 60° 또는 120°

Ⅱ. 채우기문제

1. x에 관한 방정식 $\left(x+\frac{a}{x}\right)^2-5x-\frac{5a}{x}=-6$의 두개 풀이는 같다. 이때 a의 값은 ______이다.

2. 변의 길이가 1인 직2등변3각형 ABC를 정점 $C(\angle C=90°)$의 주위로 30° 회전시켜 $\triangle A'CB'$위치에 옮겼다. 이 두개 3각형의 겹친 부분의 면적은 ______이다.

3. $\sqrt{x}=\sqrt{a}-\frac{2}{\sqrt{a}}$일 때 $\frac{x+4+\sqrt{x^2+8x}}{x+4-\sqrt{x^2+8x}}$를 간단히 하면 ___이다.

4. 그림에서 부채형 OAB의 활줄 $AB=18$, 반경이 6인 원 C는 OA, OB, 활등 $\overset{\frown}{AB}$와 접하며 원 D도 역시 OA, OB, 원 C와 모두 접한다. 이때 원 D의 반경은 _____이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 어떤 종류의 상품을 질에 따라 10개의 등급으로 나누었다. 생산된 제일 낮은 등급의 상품의 매개 리윤은 8원이다. 만일 등급을 한급 높이면 그 리윤은 2원 증가한다. 같은 공수를 들여서 제일 낮은 등급의 상품을 매일 60개 생산할수 있다. 한등급 높이면 생산량은 3개씩 줄어든다. 어떤 상품을 생산할 때 최대리윤을 얻을수 있겠는가?

2. 뾰족3각형의 한 정점에서부터 수심까지의 거리가 그로부터 외심까지의 거리와 같다. 그러면 이것을 정점으로 하는 3각형의 내각의 크기는 얼마인가.

3. $\overset{\frown}{mn}$은 두자리수이다. 2차함수 $y=x^2+mx+n$의 그라프와 x축은 서로 다른 두점에서 사귄다. 이때 두점사이의 거리는 2를 넘지 않는다. 두자리수 $\overset{\frown}{mn}$을 구하시오.

시 험 53

Ⅰ. 선택문제

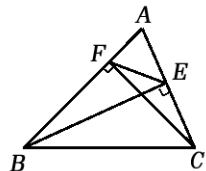
1. $a-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-b=3$이고 $a+b>0$일 때 $\frac{a}{b^3}-\frac{b}{a^3}$의 값은 ( )이다.

(ㄱ) $21\sqrt{5}$ (ㄴ) $21\sqrt{13}$ (ㄷ) $33\sqrt{5}$ (ㄹ) $33\sqrt{13}$

2. 2차함수 $y=x^2+(k+2)x+k+5$의 그라프와 x축이 서로 다른 두점에서 사귀는데 그 가로자리표는 정수이다. 이때 k의 값은 ( )이다.

(ㄱ) $k>4$ 또는 $k<-5$ (ㄴ) $-5<k<-4$

(ㄷ) $k\geq-4$ 또는 $k\leq-5$ (ㄹ) $-5\leq k\leq-4$

3. 그림에서 $\triangle ABC$는 뾰족3각형, 정점 B와 C에서 변 AC와 AB에 그은 수직선의 밑점은 각각 E, F이다. 그러면 $S_{\triangle AEF}:S_{\triangle ABC}$의 값은 ( )이다.

(ㄱ) $\sin A$　　(ㄴ) $\cos A$　　(ㄷ) $\sin^2 A$　　(ㄹ) $\cos^2 A$

4. 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1997}$의 정의옹근수풀이는 (　)개이다.

(ㄱ) 1　　(ㄴ) 2　　(ㄷ) 3　　(ㄹ) 4이상

5. P는 $\triangle ABC$의 아낙의 한점이고 PA, PB, PC가 $\triangle ABC$의 면적을 3등분한다면 점 P는 $\triangle ABC$의 (　)이다.

(ㄱ) 내심　　(ㄴ) 외심　　(ㄷ) 수심　　(ㄹ) 무게중심

6. 포물선 $y=x^2+2bx+1$과 직선 $y=2ax+2ab$의 그라프가 사귐점을 1개이상 가진다면 a^2+b^2의 최대값은 (　)이다.

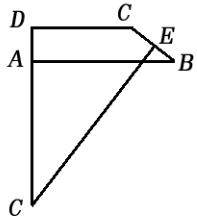
(ㄱ) 1　　(ㄴ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(ㄷ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(ㄹ) 0

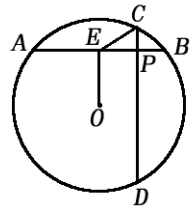
Ⅱ. 채우기문제

1. 네개의 실수의 적이 1이고 그중 임의의 한개 수와 나머지 3개 수의 적의 합이 모두 1000이면 이 네개 수들의 합은 ____이다.

2. $xy=a, xz=b, yz=c$이고 모두 0이 아니면 $x^2+y^2+z^2=$______

3. 포물선 $y=ax^2+4x+(a+2)$의 그라프가 x축의 웃쪽에 모두 놓이면 a의 값범위는 _____이다.

4. 제형 $ABCD$에서 $AB//DC$, $\angle A=90°$이다. E는 BC의 가운데점, E에서 BC에 그은 수직선과 DA의 연장선은 점 G에서 사귄다. DC=17cm, AB=25cm, BC=10cm이면 GE=____cm 이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 그림에서 AB, CD는 반경이 5인 원 O에서 서로 수직인 두 활줄이고 사귐점은 P이다. 점 E는 AB의 가운데점, $PD=AB$이고 $OE=3$일 때 $CP+CE$의 값을 구하시오.

2. a, b는 옹근수이고 1원2차방정식 $x^2+ax^{a-b}+(2a-b-1)x+a^2+a-b-4=0$의 풀이가 모두 옹근수일 때 a, b의 값을 구하시오.

3. 임의의 11개의 옹근수들가운데는 그 합이 6으로 완제되는 6개의 수가 반드시 있다. 그러나 임의의 10개의 옹근수에서 이 성질이 반드시 성립하는것은 아니다.

시 험 54

Ⅰ. 선택문제

1. $\triangle ABC$에서 $\angle C=90°$, $\angle A$의 2등분선 AD는 BC와 D에서 사귄다. 그러면 $\dfrac{AB-AC}{CD}$ 는 ( )와 같다.

(ㄱ) $\cos B$ (ㄴ) $\cot B$ (ㄷ) $\sin B$ (ㄹ) $\tan B$

2. 실수 a, b가 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+b}=0$ 을 만족시키면 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$는 ( )와 같다.

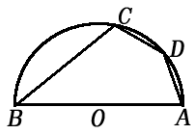
(ㄱ) $\sqrt{5}$ (ㄴ) $-\sqrt{5}$ (ㄷ) $\pm\sqrt{5}$ (ㄹ) 확정할수 없다.

3. 유리수 x, y가 $\sqrt{\dfrac{21}{4}-3\sqrt{3}}=x+\sqrt{y}$를 만족시키면 $x+y$의 값은 ( )이다.

(ㄱ) $\dfrac{3}{2}$ (ㄴ) $-\dfrac{3}{2}$, (ㄷ) 3 (ㄹ) 확정할수 없다.

4. 2등변3각형에서 $AB=AC$, $BC=4$이고 $\triangle ABC$의 내접원의 반경이 1이면 AB의 길이는 ( )이다.

(ㄱ) 2 (ㄴ) 3 (ㄷ) $2+\sqrt{3}$ (ㄹ) $\dfrac{10}{3}$

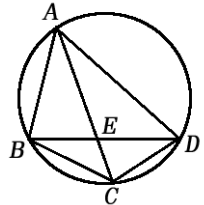
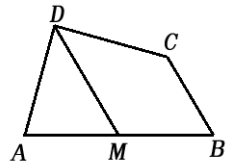
5. 그림에서 4각형 $ABCD$는 반원 O에 내접하고 AB는 직경이다. $AB=4$, $AD=DC=1$이면 BC의 길이는 ( )이다.

(ㄱ) $\dfrac{7}{2}$ (ㄴ) $\sqrt{15}$ (ㄷ) $2\sqrt{3}$ (ㄹ) $\dfrac{7}{4}$

6. m, n이 정의실수이고 방정식 $x^2+mx+2n=0$과 방정식 $x^2+2nx+m=0$이 모두 실수풀이를 가지면 $m+n$의 최소값은 ( )이다.

(ㄱ) 2 (ㄴ) 4 (ㄷ) 5 (ㄹ) 6

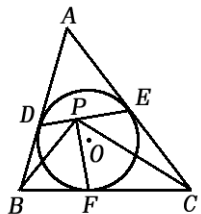
Ⅱ. 채우기문제

1. 2차함수 $y=x^2+px+q$와 x축의 정의반축이 두점 A, B에서 사귀고 y축의 정의반축이 점 c에서 사귄다. $OA:OB:OC=1:2:3$ (O는 원점)이면 2차함수의 해석식은 _____이다.

2. 그림에서 4각형 $ABCD$는 원에 내접하고 $BC=CD=4$, AC와 BD의 사귐점은 E, $AE=6$, BE와 DE의 길이가 모두 옹근수이면 BD의 길이는 ______이다.

3. 그림의 4각형 $ABCD$에서 $\angle A=75°$, $\angle B=60°$, $\angle C=135°$, $AD=CD=\sqrt{2}$, M은 AB의 가운데점이면 DM의 길이는 _____이다.

4. 어떤 완전두제곱수 n의 0이 아닌 마지막 두자리수를 지워버린후 남은 수가 여전히 두제곱수가 되였다. 그런 수 n의 최대값은 ____이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 함수 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$의 그라프와 x축, y축은 각각 A, B에서 사귀고 점 C는 1사분구의 점이다. $\triangle ABC$는 2등변직3각형이고 $\angle BAC=90°$, 한점 $P(a, \frac{1}{2})$에 대하여 $\triangle ABP$와 $\triangle ABC$의 면적은 같다. a의 값을 구하시오.

2. 그림에서 원 O는 $\triangle ABC$의 내접원이고 D, E, F는 접점이다. F에서 DE에 그은 수직선의 밑점을 P라고 하면 $\angle DBP=\angle ECP$임을 증명하시오.

3. 질량이 각각 1^2, 2^2, 3^2,…, 40^2인 분동이 각각 1개씩 있다. 이 분동들로 질량이 같게 두개 조를 만들면 매 조에 각각 20개의 분동이 있게 된다는것을 증명하시오.

시 험 55

Ⅰ. 선택문제

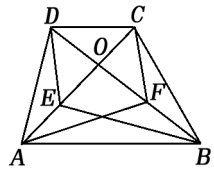
1. 점 $M(x, y)$의 자리표는 $|x+y|<|x-y|$를 만족시킨다. 점 M은 (　　)사분구에 있다.

(ㄱ) (1, 3)　　(ㄴ) 2, 4　　(ㄷ) 1, 2　　(ㄹ) 3, 4

2. a^2의 십의 자리수가 1, 3, 5, 7, 9로 될수 있으면 a의 일의 자리수는 (　　)이다.

(ㄱ) 반드시 4　(ㄴ) 반드시 6　(ㄷ) 4또는 6　(ㄹ) 확정할수 없다

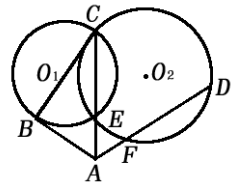
3. 그림의 제형 $ABCD$에서 $AB//CD$, O는 AC와 BD의 사귐점. E는 AO우의 점, $AE=OC$, F는 BO우의 점, $BF=OD$이면 $\triangle AFC$의 면적 S_1와 $\triangle BED$의 면적 S_2의 관계는 (　　)과 같다.

(ㄱ) $S_1>S_2$　　(ㄴ) $S_1=S_2$

(ㄷ) $S_1<S_2$　　(ㄹ) 확정할수 없다

4. $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c}=3$ 이면 $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-b)(b-c)$의 값은 (　　)이다.

(ㄱ) 1　(ㄴ) 2　(ㄷ) 3　(ㄹ) 4

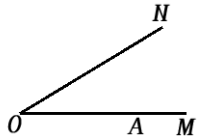
5. 원 O_1과 원 O_2은 서로 점 C, E에서 사귀고 CB는 원 O_1의 직경이다. B를 지나는 원 O_1의 접선은 CE의 연장선과 A에서 사귀고 AFD는 가름선으로서 원 O_2과 F, D에서 사귄다. $BC=FD=2$, $CE=\sqrt{3}$ 일 때 AF의 길이는 (　　)이다.

(ㄱ) $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$　(ㄴ) $\dfrac{\sqrt{21}+1}{3}$　(ㄷ) $\dfrac{\sqrt{21}+3}{3}$　(ㄹ) $\dfrac{\sqrt{21}-3}{3}$

Ⅱ. 채우기문제

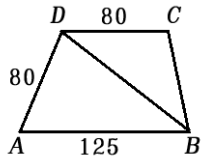
1. 정수 a,b,c가 $\begin{cases} a+b+c=10 \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases}$을 만족시키면 a,b의 최대값은 _____이다.

2. $x=\dfrac{23+\sqrt{469}}{5}$이면 $25x^4-1996x^2+1997$의 값은 ____과 같다.

3. 점 P가 바른4각형 $ABCD$의 외접원의 활등 $\overset{\frown}{AD}$ 우의 임의의 한점일 때 $PA+PC$와 PB의 비는 _____이다.

4. 두 도로 OM과 ON이 서로 30°로 사귀고 점 O로부터 OM을 따라 80m되는 곳에 소학교 A가 있다. 수확기가 ON방향으로 달릴 때 길 량쪽 50m이내에서 이수확기가 내는 소음의 영향을 받는다. 수확기의 속도는 시간당 18km이다. 수확기가 ON방향으로 갈 때 소학교에 영향을 주는 시간은 ____s이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 자연수변수 x에 관한 2차함수 $y=x^2-4ax+5a^2-3a$의 최소값은 m이고 a는 부등식 $0\le a^2-4a-2\le 10$을 만족시키면 m의 최대값은 얼마인가?

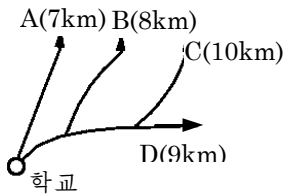
2. 그림의 제형 $ABCD$에서 $AB//CD$, $AB=125$, $AD=DC=80$이다. 대각선 BD가 제형을 두개의 닮은 3각형으로 나눌수 있는가 없는가를 증명하시오. 할수 있다면 BC,BD의 길이를 구하시오.

3. 자리표평면에서 가로, 세로자리표는 모두 옹근수이다. 정점은 모두 이런 옹근수점을 가진 다각형이다. 옹근수점을 가진 볼록5각형우에서는 반드시 하나의 4각형이 적어도 5개의 옹근수점을 가질수 있다는것을 증명하시오.

시 험 56

Ⅰ. 선택문제

1. 여섯자리수 $N=\overline{x1527y}$ 는 4의 배수이고 N을 11로 나눈 나머지는 5이다. $x+y$는 (   )와 같다.

(ㄱ) 8 (ㄴ) 9 (ㄷ) 10 (ㄹ) 11

2. 어느 학교에서 일요일에 등산을 가기로 하였다. 그들은 8시 30분에 떠나서 될수록 등산로정의 제일 먼 산의 산꽉대기에서 1h동안 오락회를 하고 오후 3시전에 돌아오려고 계획하였다. 갈 때 평균속도가 시간당 3.2km, 돌아올 때 평균속도가 시간당 4.5km였다면 등산한 제일 먼 산의 정점은 ( )이다.

(ㄱ) A (ㄴ) B (ㄷ) C (ㄹ) D

3. 2등변3각형에서 $AB=AC$, $BC=4$라는것을 알고있다. 내접원의 반경이 1일 때 변의 길이는 (   )이다.

(ㄱ) $\frac{10}{3}$ (ㄴ) $\frac{11}{3}$ (ㄷ) 4 (ㄹ) $\frac{13}{3}$

4. $x\geq 0$, $y\geq 0$, $2x+y=6$이면 $P=4x^2+3xy+y^2-6x-3y$는 (   )이다.

(ㄱ) 최대값은 18이고 최소값은 없다.

(ㄴ) 최대값은 없고 최소값은 $\frac{27}{2}$이다,

(ㄷ) 최대값은 18이고 최소값은 $\frac{27}{2}$이다,

(ㄹ) 최대최소값은 없다

5. $a>0$일 때 $\sqrt{a-x^2}=\sqrt{2}-|x|$가 서로 다른 실수풀이를 가진다면 a의 값범위는 (   )이다.

(ㄱ) $a>0$ (ㄴ) $0<a<1$ (ㄷ) $a=1$ (ㄹ) $a\geq 1$

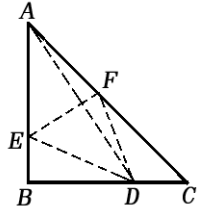
Ⅱ. 채우기문제

1. a, b, c는 실수이고 $a+b+c=0$, $abc>0$을 만족시키며

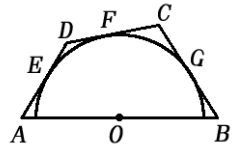
$x=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$, $y=a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 이면

$x^{97}-96xy+y=$_______이다.

2. α, β가 방정식 $x^2+x-1=0$의 두개의 실수풀이이면 $\alpha^4-3\beta=$________이다.

3. 그림의 $\triangle ABC$에서 $AB=BC=12$, $\angle B=90°$ 이고 EF를 따라 접어서 점 A를 BC의 점 D에 오게 하였다. 만일 $BD:DC=2:1$이면 AE의 길이는 ____이다.

4.포물선 $y=x^2+kx+4-k$와 x축은 옹근수점 A, B에서 사귀고 y축과는 점 C에서 사귄다. $\triangle ABC$의 면적은 _____이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 그림의 4각형 $ABCD$에서 O는 AB의 가운데점, 반원 O는 AD, DC, CB와 각각 점 E, F, G에서 접한다. $AB^2=4AD\cdot BC$임을 증명하시오.

2. x, y가 자연수이고 두개의 분수 $\frac{x^2-1}{y+1}$, $\frac{y^2-1}{x+1}$의 합과 적이 모두 옹근수일 때 이 두개의 분수는 모두 옹근수라는것을 증명하시오.

3. $a>b>c>0$에 대하여 2차방정식 $x^2-(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$을 만들자.

(1) 만일 방정식이 실수풀이를 가지면 a, b, c는 하나의 3각형의 세변의 길이로 될수 없다는것을 증명하시오.

(2) 만일 방정식이 실수풀이 x_0을 가지면 $a>x_0>b+c$임을 증명하시오.

(3) 방정식의 실수풀이가 6, 9일 때 정의 옹근수 a, b, c를 구하시오.

시 험 57

Ⅰ. 선택문제

1. $\frac{x-y}{a}=\frac{y-z}{b}=\frac{z-x}{c}=abc<0$이면 a, b, c가운데서 부아닌 수는 ____개이다.

(ㄱ) 1 (ㄴ) 2 (ㄷ) 3 (ㄹ) 4

2. a가 방정식 $3x^2-2x-663=0$의 한 실수풀이이면 $\left(3a^3-664\frac{1}{3}a-444\right)^3$의 값은 ( )이다.

(ㄱ) 1 (ㄴ) -1 (ㄷ) 8 (ㄹ) -8

3. 제형의 두 대각선의 길이가 각각 m, n이고 그 사이각이 60°이면 제형의 면적은 ( )이다.

(ㄱ) $\sqrt{3}mn$, (ㄴ) $\frac{\sqrt{3}}{2}mn$, (ㄷ) $\frac{\sqrt{3}}{4}mn$, (ㄹ) $\frac{\sqrt{3}}{8}mn$

4. 3개의 실수 x_1, x_2, x_3이 있다. 이것을 임의의 한개 수에 그 나머지 두개 수의 적의 5배를 더하면 6이 된다. 이런 3원수묶음(x_1, x_2, x_3)은 모두 ( )조 있다.

(ㄱ) 2 (ㄴ) 3 (ㄷ) 4 (ㄹ) 5

5. $A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{a}\right)$, $B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{b}\right)$, $C\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{c}\right)$가 $\frac{a}{b+c}=\frac{1}{3}$, $\frac{b}{a+c}=\frac{1}{2}$을 만족시키면 세점 A, B, C의 위치는 ( )이다.

(ㄱ) 같은 직선에 놓인다 (ㄴ) 뾰족3각형을 이룬다
(ㄷ) 직3각형을 이룬다 (ㄹ) 무딘3각형을 이룬다

6. 직3각형 ABC에서 $AB=3, AC=4, BC=5$이고 세 점 A, B, C로부터 어떤 직선 l까지의 거리를 각각 d_A, d_B, d_C라고 할때 $d_A:d_B:d_C=1:2:3$이면 조건에 맞는 직선 l은 모두 ( )개이다.

(ㄱ) 1 (ㄴ) 2 (ㄷ) 3 (ㄹ) 4

Ⅱ. 채우기문제

1. $0<a^2+b^2\leq-2ab$이면 $\frac{a^2+b^2}{ab}$의 값은 ____이다.

2. 자연수 a, x, y가 $\sqrt{a-2\sqrt{6}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$를 만족시키면 a의 최대값은 _____이다.

3. 반경이 1cm인 하나의 원이 변의 길이가 6cm인 바른6각형의 아낙에서 임의의 위치로 이동한다(원이 바른6각형의 변들과 접할수 있다). 그러면 원이 바른6각형안에서 지나가는 면적은 _____cm^2이다.

4. 3각형의 세변의 길이 a, b, c는 모두 옹근수이고 $a+b+c=11$이다. 적 abc가 최소값을 취할 때 3각형의 면적은 _____이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 방정식 $\sqrt{7x-4}-\sqrt{7x-5}=\sqrt{4x-1}-\sqrt{4x-2}$의 풀이를 구하시오.

2. α, β는 방정식 $x^2-7x+8=0$의 두 풀이이고 $\alpha > \beta$이다. 방정식을 풀지 말고 풀이와 결수사이의 관계를 리용하여 $\dfrac{2}{\alpha}+3\beta^2$의 값을 구하시오.

3. AB는 원 O의 직경보다 작은 하나의 활줄이다. $\triangle OAB$를 원중심 O주위로 시계바늘방향으로 $\angle\alpha$ $(0° < \alpha < 360°)$만큼 회전시켜 $\triangle OA'B'$를 얻었다. 회전과정에 활줄 $A'B'$가 AB우의 매 점을 통과할수 있는가를 말하고 증명하시오.

시 험 58

Ⅰ. 선택문제

1. 어느 한 학교 100명의 학생들이 수학경연에 참가하였는데 그중 녀학생은 적어도 9명이다. 참가자들중 임의의 10명중에는 적어도 1명의 남학생이 있다. 참가자들중 남학생은 ( )명이다.

(ㄱ) 89 (ㄴ) 91 (ㄷ) 82 (ㄹ) 63

2. 련립방정식 $\begin{cases} xy+yz=63 \\ xz+yz=23 \end{cases}$의 정의옹근수풀이는 ( )개이다.

(ㄱ) 1 (ㄴ) 2 (ㄷ) 3 (ㄹ) 4

3. $\triangle ABC$에서 $AB=AC=7$, $BC=4$이다. 점 M은 AB우의 점이

고 $BM=\frac{1}{3}AB$이다. 점 M을 지나 BC에 수직인 직선이 BA와 사귀는 점을 E, CA의 연장선과의 사귐점을 F라고 하면 EF의 길이는 ( )이다.

(ㄱ) $5\sqrt{5}$ (ㄴ) $\frac{5\sqrt{33}}{3}$ (ㄷ) $4\sqrt{5}$ (ㄹ) $6\sqrt{5}$

4. 방정식 $(x-1)(x^2-2x+m)=0$의 세개의 풀이가 한 3각형의 세 변의 길이로 되면 실수 m이 취하는 값범위는 ( )이다.

(ㄱ) $0 < m \le 1$ (ㄴ) $m \ge \frac{3}{4}$ (ㄷ) $\frac{3}{4} < m \le 1$ (ㄹ) $m \ge 1$

5. 어느 한 네자리수가 다음의 성질을 가진다. 뒤의 두자리수로 이 네자리수를 나누어 하나의 완전두제곱수(만일 십의 자리수가 0이면 일의 자리수로만 나눈다.)를 얻는다. 그리고 이 완전두제곱수가 꼭 앞의 두자리수에 1을 더한 두제곱수와 같으면 이런 성질을 가지는 네자리수는 모두 ( )개이다.

(ㄱ) 1 (ㄴ) 2 (ㄷ) 3 (ㄹ) 4

6. $y=\frac{x^2}{10}-\frac{x}{10}+\frac{9}{5}$이고 $y \le |x|$이면 x의 값범위는 ( )이다.

(ㄱ) $x \le 9$

(ㄴ) $x \ge -6$

(ㄷ) $\frac{1}{5} \le x \le \frac{9}{10}$ 또는 $-\frac{3}{5} \le x \le \frac{3}{10}$

(ㄹ) $2 \le x \le 9$ 또는 $-6 \le x \le -3$

Ⅱ. 채우기문제

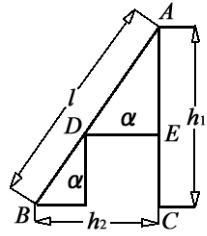
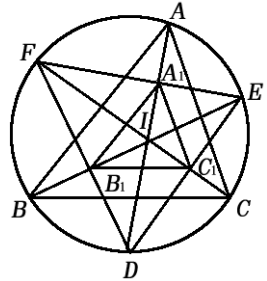
1. a가 방정식 $x^2+x-\frac{1}{4}=0$의 풀이일 때 $\frac{a^3-1}{a^3-a}$ 의 값은 ___ 이다.

2. 선분 AB를 직경으로 하나의 반원을 그리고 중심을 O라고 하자. C는 반원주우의 한점이고 $OC^2=AC\cdot BC$이면 $\angle CAB=$_____이다.

3. 정의옹근수 a, b, c가 조건: $a > b > c$, $(a-b)(b-c)(a-c)=72$와 $abc < 100$을 만족시킨다면 a, b, c는 차례로 _____이다.

4. $\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{25\sqrt{24}+24\sqrt{25}}=$____

Ⅲ. 풀이문제

1. 그림에서 AC는 땅우에 수직인 전주대이고 AB는 전주대에 사선으로 고정시킨 철근이다. 철근길이가 l이고 철근우의 D점에서 전주대와 땅면까지의 거리가 d이다. d와 l을 리용하여 철근의 두 끝 A, B부터 전주대 밑둥C까지의 거리를 h_1, h_2로 표시하시오.

2. 뾰족3각형 ABC에서 $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$의 2등분선과 $\triangle ABC$의 외접원은 D, E, F에서 사귄다. EF, FD, DE를 맺으면 AD, BE, CF는 각각 A_1, B_1, C_1에서 사귄다. $\triangle ABC$의 내심 I 는 또 $\triangle A_1B_1C_1$의 내심이라는것을 증명하시오.

3. 어느 한 상점에서 1층과 2층사이에 자동계단승강기를 설치하였다. 이 승강기는 균일한 속도로 올라간다. 남자아이와 녀자아이가 동시에 자동승강기우로 걸어서 2층까지 올라간다(승강기자체도 올라간다). 남자아이와 녀자아이는 모두 등속운동을 한다고 보자. 이때 남자아이가 매 분당 올라가는 계단수는 녀자아이의 2배이다. 승강기정점까지 올라가는데 남자아이는 27개 계단, 녀자아이는 18개 계단 걷는다는것을 알고있다(남, 녀아이는 매번 1개 계단씩 뛰여넘어 올라간다고 하자).

(1) 승강기에서 로출된 부분의 계단수는 얼마인가?

(2) 만일 승강기부근에 2층에서 1층으로 내려오는 계단이 있다고 하면 이 계단의 개수와 승강기의 계단수는 같다. 두 아이가 승강기정점까지 올라갔다가 원래의 속도로 다시 아래로 내려와서 승강기를 탄다면 남자아이는 몇계단을 걸어 녀자아이를 처음으로 따라잡겠는가?

시 험 59

Ⅰ. 선택문제

1. 아래의 4개식들가운데서 $(a-3)\sqrt{\frac{1}{3-a}}$ 과 같은것은 ( ) 이다.

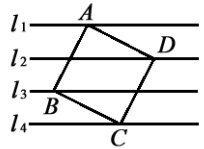
(ㄱ) $\sqrt{a-3}$ (ㄴ) $-\sqrt{a-3}$ (ㄷ) $\sqrt{3-a}$ (ㄹ) $-\sqrt{3-a}$

2. $y=|x-1|-2|x|+|x+2|$이고 $-2\le x\le 1$일 때 y의 최대값과 최소값의 합은 ( )이다.

(ㄱ) -1 (ㄴ) 2 (ㄷ) 4 (ㄹ) 5

3. 방정식 $m|x|-x-m=0\,(m>0$이고 $m\neq 1)$이 두개의 실수풀이를 가질 때 m의 값범위는 ( ).

(ㄱ) $m>1$ (ㄴ) $0<m<1$ (ㄷ) $0<m<1$ 또는 $m>1$ (ㄹ) 이런 m은 존재하지 않는다.

4. 그림에서 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3 /\!/ l_4$이고 린접한 두 평행선사이거리는 모두 h이다. 바른4각형 $ABCD$의 4개정점이 각각 네개 직선우에 있으면 그의 면적은 ( )과 같다.

(ㄱ) $4h^2$ (ㄴ) $5h^2$ (ㄷ) $4\sqrt{2}h^2$ (ㄹ) $5\sqrt{2}h^2$

5. x는 무리수이고 $(x+1)(x+3)$은 유리수이다. 이 가정밑에 한 학생이 다음의 4가지 결론을 내놓았다.

(1) x^2은 유리수이다

(2) $(x-1)(x-3)$은 무리수이다

(3) $(x+1)^2$은 유리수이다

(4) $(x-1)^2$은 무리수이다

이중에서 n개만이 정확한것이라고 하면 n은 ( )과 같다.

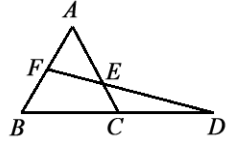
(ㄱ) 0 (ㄴ) 1 (ㄷ) 2 (ㄹ) 4

6. G가 $\triangle ABC$의 무게중심이고 $AG=6,\ BG=8,\ CG=10$이면 $\triangle ABC$의 면적은 ( )이다.

(ㄱ) 58 (ㄴ) 66 (ㄷ) 72 (ㄹ) 84

Ⅱ. 채우기문제

1. 철이는 이번주에 수학문제를 120문제풀기로 하였다. 이것을 90％로 낮추어도 전번주의 문제에 비하여 20％ 더 많은것으로 된다. 그러면 전번주의 문제풀이수는 ____개이다.

2. 그림에서 바른3각형 ABC의 변의 길이는 2이고 F는 AB의 가운데점이다. BC의 연장선에서 $BC = CD$인 점을 D라고 하고 FD와 AC의 사귐점을 E라고 하면 4각형 $BCEF$의 면적은 ____이다.

3. 방정식 $x^2+(2m-1)x+(m-6)=0$의 한 풀이는 1보다 크지 않고 다른 풀이는 1보다 작지 않다. 그러면 이 방정식의 두 풀이의 두제곱의 합의 최대값은 _____

4. ABC는 뾰족3각형이고 AD, BE는 두 높이이다. $S_{\triangle ABC}=18$, $S_{\triangle DEC}=2$, $DE=2\sqrt{2}$일 때 $\triangle ABC$의 외접원의 직경은 ____이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 실수 a, b, c는 $(a+c)(a+b+c)<0$을 만족시킨다.
$(b-c)^2>4a(a+b+c)$임을 증명하시오.

2. $\triangle ABC$에서 $AB=AC$, D는 BC우의 임의의 한점, 점 C_1는 직선 AD에 대한 C의 대칭점, C_1B와 AD는 서로 점 P에서 사귄다. 점 D가 BC(BC의 가운데점은 제외)우에서 움직일 때 AD, AP의 값은 어떻게 변하는가? 그것을 증명하시오.

3. a, b, c, d는 모두 정수이고 $S=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}$ 일 때 S의 값은 두개의 련속인 자연수들사이에 있다는 것을 증명하시오.

시 험 60

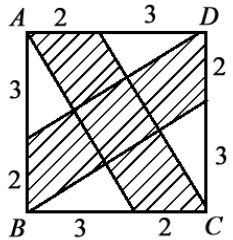
Ⅰ. 선택문제

1. $2x^2-2ax+3a-4=0$의 실수풀이는 없다. 이때 대수식 $\sqrt{a^2-8a+16}+|2-a|$의 값은 ( )이다.

(ㄱ) 2 (ㄴ) 5 (ㄷ) $2a-b$ (ㄹ) $6-2a$

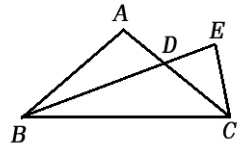
2. $a=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$이면 $\dfrac{a^2-1}{a+1}-\dfrac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}=$( )

(ㄱ) $-(1+2\sqrt{3})$ (ㄴ) -1 (ㄷ) $2-\sqrt{3}$ (ㄹ) 3

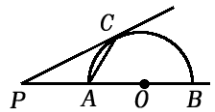
3. 그림에서 4각형 $ABCD$는 바른4각형이다. 수값은 그림에 표시하였다. 그림에서 빗선친 부분의 면적은 ( )이다.

(ㄱ) 17 (ㄴ) $\dfrac{290}{7}$ (ㄷ) 18 (ㄹ) $10\sqrt{3}$

4. 방정식 $3x+by+c=0$과 $cx-2y+12=0$의 그라프가 일치하고 n이 우의 조건을 만족시키는 (b, c)묶음의 수라고 하면 n은 ( )와 같다.

(ㄱ) 0 (ㄴ)1 (ㄷ) 2 (ㄹ) 유한개이며 2보다 크다

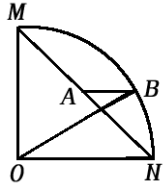
5. 그림의 $\triangle ABC$에서 $AB=AC$, $\angle ABC=40°$, BC는 $\angle ABC$의 2등분선, BD를 연장하여 $AD=DE$인 점 E를 찍는다. 그러면 $\angle ECA$의 크기는 ( )이다.

(ㄱ) 30° (ㄴ) 35° (ㄷ) 40° (ㄹ) 45°

6. 그림에서 P는 반원 O의 직경이고 BA의 연장선우의 점이다. P를 지나는 직선이 반원과 C에서 접하고 $PA:PC=2:3$이면 $\sin\angle ACP$의 값은 ( )이다.

(ㄱ) $\dfrac{2}{3}$ (ㄴ) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (ㄷ) $\dfrac{2\sqrt{3}}{13}$ (ㄹ) 확정할 방법이 없다.

Ⅱ. 채우기문제

1. 볼록n각형 $A_1A_2\cdots A_n$ $(n>4)$의 모든 내각이 15°의 옹근수배이고 $\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3=285°$이면 n은 _____과 같다.

2. 4개의 직선 $y=mx-3$, $y=-1$, $y=3$, $x=1$로 둘러싸인 4각형의 면적이 12이면 m은 ____과 같다.

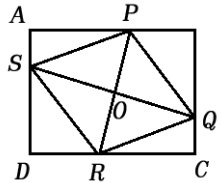
3. 부채형 MON에서 $\angle MON=90°$, 선분 MN의 가운데점 A를 지나 ON에 평행인 직선 AB가 $\overset{\frown}{MN}$과 사귀는 점을 B라고 하면 $\angle BON=$______이다.

4. 부등식 $|x-a|+|x|<2$가 실수풀이를 가지지 않는다면 실수 a의 값범위는 _____이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 련립방정식

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{9}{x}+\dfrac{4}{y}=0 \\ \left(x^2+9\right)\left(y^2+4\right)=24xy \end{cases}$$

의 풀이를 구하시오.

2. 등변4각형 $PQRS$는 직4각형 $ABCD$에 내접하였다(그림). 여기서 P,Q,R,S는 각각 변 AB, BC, CD, DA우의 점이다. $PB=15$, $BQ=20$, $PR=30$, $QS=40$일 때 직4각형 $ABCD$의 둘레길이를 구하시오.

3. 뾰족3각형 ABC의 아낙의 한점이 P이고 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\alpha$라고 할 때

$\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$임을 증명하시오.

답과 풀이방법

시 험 31

I. 선택문제

1. (ㄴ) $$a=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}=b$$

2. (ㄹ) $$\begin{cases} xz-2yt=3 & ① \\ xt+yz=1 & ② \end{cases}$$

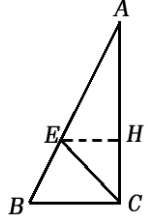
①^2+②$^2\times 2$로부터 다음의 식을 얻는다.

$$x^2z^2+4y^2t^2+2x^2t^2+2y^2z^2=11$$
$$(x^2+2y^2)(z^2+2t^2)=11$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+2y^2=1 \\ z^2+2t^2=11 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x^2+2y^2=11 \\ z^2+2t^2=1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ y_1=0 \\ z_1=3 \\ t=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=0 \\ z_2=-3 \\ t_2=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=3 \\ y_3=1 \\ z_3=1 \\ t_3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=-3 \\ y_4=-1 \\ z_4=-1 \\ t_4=0 \end{cases}$$

3. (ㄹ) $AB//CD$이므로 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$이고 $\triangle CDE \backsim \triangle ABE$이다. $S_{\triangle CED}:S_{\triangle ABE}=DE^2:AE^2$이므로 AD를 맺자. AB는 원 O의 직경이므로 $\angle ADB=90^\circ$, 직3각형 ADE에서 $DE=AE\cos\alpha$. ∴ $S_{\triangle CDE}:S_{\triangle ABE}=\cos^2\alpha$

4. (ㄴ) 방정식이 실수풀이를 가진다는데로부터 $\triangle\geq 0$이다. 즉

$(k-2)^2-4(k^2+3k+5)\ge 0 \Rightarrow 3k^2+16k+16\le 0 \Rightarrow (3k+4)(k+4)\le 0 \Rightarrow$ $-4\le k\le -\dfrac{4}{3}$ 이고 $x_1+x_2=k-2$, $x_1x_2=k^2+3k+5$ 이다. 이로부터 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)=-k^2-10k-6=19-(k+5)^2$이다. $k=4$일 때 $x_1^2+x_2^2$의 최대값은 18이다.

5.(ㄱ) 그림에서 $AC=b$, $BC=a$라고 하자. 점 E를 지나 AC에 그은 수직선의 밑점을 H라고 하면 CE는 직각 C의 2등분선이므로 $\triangle CHE$는 2등변직3각형이다. $EH=x$라고 하면 $CH=x$, $CE=\sqrt{2}x$, $CE+BC=AC$,

$\therefore$ $\sqrt{2}x+a=b \Rightarrow x=\dfrac{b-a}{\sqrt{2}}$ 그리고 $\dfrac{AH}{EH}=\dfrac{AC}{BC}$ 로부터

$\dfrac{b-x}{x}=\dfrac{b}{a} \Rightarrow x=\dfrac{ab}{a+b}$ 그러면 $\dfrac{ab}{a+b}=\dfrac{b-a}{\sqrt{2}} \Rightarrow b^2-\sqrt{2}ab-a^2=0$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{BC}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

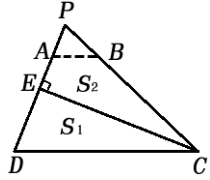
6. (ㄷ) $y=ax+\dfrac{1}{a}(1-x)$ 로부터 $y=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)x+\dfrac{1}{a}$ 을 얻을수 있다. $a\ge 1$일 때 함수는 증가함수 또는 상수함수로 된다. $x=0$일 때 최소값은 $\dfrac{1}{a}$, $0<a<1$일 때 $a-\dfrac{1}{a}<0$ 함수는 감소한다. $x=1$일 때 y의 최소값은 a이다.

Ⅱ. 채우기문제

1. $\dfrac{168}{5}$ 문제의 조건으로부터

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3}\\[2mm] \dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{4}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\dfrac{24}{5}\\[2mm] b=\dfrac{24}{7}\\[2mm] c=24\end{cases} \Rightarrow \dfrac{ac}{b}=\dfrac{168}{5}$$

2. $\dfrac{7}{8}$ 그림에서 DA, CB의 연장선은 P에서 사귄다.

$\because$ CE는 $\angle BCD$의 2등분선 $\therefore$ $CE \perp AD$, CE는 공통선이므로 $\triangle CED \equiv CEP$ $\therefore$ $DE=PE$, $DE=2AE$이므로 $PA=\frac{1}{4}PD$,

$AB /\!/ CD$이므로 $\triangle PAB \backsim \triangle PDC$

$\therefore$ $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{16}S_{\triangle PDC}$

$S_{\triangle CED}=S_{\triangle CEP}$, $S_{\triangle CEB}=1$이므로 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{8}$, $S_2=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

3. 17　　$x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ 이므로 $\therefore$ $x^3+7=5\sqrt{2}$, $x^6+14x^3+49=50$

$\therefore$ $x^6+14x^3+50=51$

$\because$ $x=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^3}=\sqrt{2}-1$

$\therefore$ $x+1=\sqrt{2}$ $\therefore$ $x^2+2x+1=2$ $\therefore$ $x^2+2x+2=3$

$\therefore$ 주어진 식$=\frac{51}{3}=17$

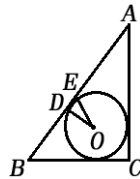
4. $\sqrt{5}$　　$BC=6, CA=8, AB=10$이라고 하자.

$BC^2+CA^2=AB^2$이므로

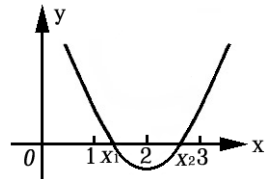
$\therefore$ $\angle C=90^\circ$, O는 내심, E는 외심, O를 지나 AB에 그은 수직선의 밑점을 D라고 하면 E는 AB의 가운데점, OD는 내접선의 반경이다.

$OD=\frac{6+8-10}{2}=2$

$DE=BE-(BC-2)=5-(6-2)=1$

$OE=\sqrt{OD^2+DE^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

Ⅲ. 풀이문제

1. 2차함수 $f(x)=2x^2-2mx+n$을 만들자.

방정식의 두 풀이는 2차함수의 그라프와 x축의 사귐점의 가로자리표이다. $1 \le x_1 < 2$, $2 \le x_2 < 3$으로부터

$$\begin{cases} \Delta = 4m^2 - 8m > 0 & ① \\ f(1) = 2 - 2m + n \geqq 0 & ② \\ f(2) = 8 - 4m + n \leqq 0 & ③ \\ f(3) = 18 - 6m + n > 0 & ④ \end{cases}$$

③으로부터 $-8+4m-n>0$ ⑤

②+⑤로부터 $m \geq 3$

④로부터 $-18+6m-n<0$ ⑥

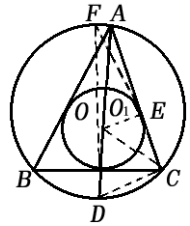
③+⑥으로부터 $m<5$

∴ $3 \leq m < 5$ 즉 $m=3$ 또는 4

$m=3$을 ② ③ ④에 대입하면 $n=4$

$m=4$를 ② ③ ④에 대입하면 $n=7$ 또는 8 다시 m, n을 1에 대입하면 $m=4, n=8$일 때 $\triangle=0$

∴ m, n의 값은 $m=3, n=4$ 또는 $m=4, n=7$이다.

2. O_1에서 AC에 그은 수직선의 밑점을 E라고 하자. AC와 원 O_1는 접하므로 E는 접점, $O_1E=r$, CD, DO를 맺고 DO를 연장하여 원 O와 사귀는 점을 F라고 하고 CF를 맺으면 $\angle DCF=90°$, $DF=2R$이다. O_1는 $\triangle ABC$의 내심이므로 O_1C를 맺으면 $\angle ACO_1=\angle BCO_1$, $\angle BCD=\angle BAD=\angle DAC$ ∴ $\angle ACO_1+\angle DAC=\angle BCD+\angle BCO_1$ 즉 $\angle DO_1C=\angle DCO_1$ ∴ $DC=DO$, $\angle DCF=\angle D_1EA=90^{\circ}$, $\angle DFC=\angle O_1AE$이므로 $\triangle DCF \backsim \triangle O_1EA$, ∴ $DC:O_1E=DF:O_1A$ ∴ $AO_1 \cdot O_1D=2R\gamma$.

3. 불가능하다. 우리는 1994×1994칸 표에서

A_1	A_2	997
A_3	A_4	997
997	997	

임의의 한가지 불합리한 채색방법을 고찰할수 있다. 즉 어떤 두개 칸의 중심에 대한 대칭칸이 다른 색으로 채색되는 방법을 고찰할수 있다. 표에서 검은칸은 모두 1로, 흰칸은 모두 −1로 표시하자.

수평방향과 수직방향의 대칭축을 따라 4개의 997×997인 정방형으로 나누자(실례로 그림에서 그것을 각각 A_1, A_2, A_3, A_4로 표시하자). 매 하나의 정방형에는 홀수개의 칸이 포함된다. 그러므로 매 정방형에 표시된 수들의 합은 모두 0이 아니다. 그런데 표의 매 대칭칸에는 서로 다른 색칠을 하므로 A_1와 A_2의 모든 수들의 합은 O, A_2과 A_3의 모든 수들의 합은 0이다. 그러므로 A_1와 A_4중 어느 하나는 수자들의 합이 정수이고 또 A_2과 A_3중 어느 하나는 수자들의 합이 정수이다. 정수인것이 A_1와 A_3 또는 A_2과 A_4이라고 할수 있는데 그러면 어느 한 렬에서 1의 개수가 −1의 개수보다 많다는 것을 의미한다. 즉 검은칸이 흰칸보다 많다. 그러므로 문제의 두 조건을 동시에 만족시키는 채색방법은 존재하지 않는다.

시 험 32

I. 선택문제

1. (ㄷ) $y^2-x^2=ac+bd-(ab+cd)=(c-b)(a-d)<0$, y, $x>0$이므로 $y<x$, $z^2-y^2=ad+bc-(ac+bd)=(d-c)(a-b)<0$, 또는 $z,y>0$이므로 $z>y$.

$\therefore\ z<y<x$

2. (ㄷ) 문제의 조건에 의하여 $\triangle=p^2+4\times580p=p(p+4\times580)$은 두제곱수이다. p가 씨수이므로 $p+4\times580$은 p로 완제된다. $\therefore$ 4×580이 p로 완제된다. $4\times580=2^4\times5\times29$. $\therefore$ $p=2$ 또는 5 또는 29 검산해보면 $p=29$일 때 주어진 방정식의 두 풀이는 모두 옹근수이다.

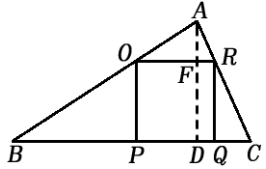
3. (ㄷ) AC, AD를 맺으면 $S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ACB}+S_{\triangle ADE}=S_{ABCDE}$

$\therefore\ \frac{1}{2}CD\cdot AP+\frac{1}{2}CB\cdot AQ+\frac{1}{2}DE\cdot AR=5\cdot\frac{1}{2}CD\cdot OP$, $CD=CB=DE$이므로 $AP+AQ+AR=50P$

$\therefore\ AO+AQ+AR=4\cdot OP=4\times1=4$

4. (ㄱ) $a^2-3a+1=0\Rightarrow\frac{a}{a^2+1}=\frac{1}{3}$

주어진 식$=\dfrac{(a^2-3a+1)(2a^3+a^2+3a)+4a}{3(a^2+1)}=\dfrac{4a}{3(a^2+1)}=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{9}$

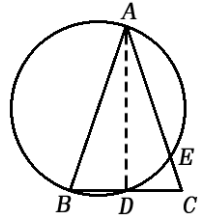
5. (ㄷ) 바른4각형 $OPQR$의 변의 길이는 x, 즉 $OP=PQ=QR=OR=x$이다. $\triangle ABC$에서 높이 AD와 OR와의 사귐점을 F라고 하면 $AF=\dfrac{2S_1}{OR}=\dfrac{2}{x}$ 마찬가지로 $BP=\dfrac{6}{x}$, $QC=\dfrac{2}{x}$이다.

그러면 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AD\cdot BC=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{x}+x\right)\left(\dfrac{6}{x}+x+\dfrac{2}{x}\right)=\dfrac{1}{2}\left(x^2+10+\dfrac{16}{x^2}\right)$

한편 $S_{\triangle ABC}=S_1+S_2+S_3+S_{OPQR}=5+x^2$ ∴ $\dfrac{1}{2}\left(x^2+10+\dfrac{16}{x^2}\right)=5+x^2$, $x=2$

6. (ㄱ) $\begin{cases}3x+2y+z=5\\2x+y-3z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=7z-3\\y=-11z+7\end{cases}\Rightarrow u=3(7z-3)+(-11z+7)-7z=3z-2$, $x\geq0$, $y\geq0$이므로 $\begin{cases}7z-3\geq0\\-11z+7\geq0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{3}{7}\leq z\leq\dfrac{7}{11}\Rightarrow 3\times\dfrac{3}{7}-2\leq 3z-2\leq 3\times\dfrac{7}{11}-2$ 즉 $-\dfrac{5}{7}\leq u\leq-\dfrac{1}{11}$, ∴ $u_{\min}=-\dfrac{5}{7}$, $u_{\max}=-\dfrac{1}{11}$ ∴ $u_{\min}+u_{\max}=-\dfrac{5}{7}-\dfrac{1}{11}=-\dfrac{62}{77}$.

Ⅱ. 채우기문제

1. $\dfrac{1996}{1997}$ $y=0$이라고 하면 $n(n+1)x^2-(2n+1)x+1=0$ 인수분해하면 $(nx-1)[(n+1)x-1]=0$ 풀이는 $x_1=\dfrac{1}{n+1}$, $x_2=\dfrac{1}{n}$ ∴ $|x_2-x_1|=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, $n=1, 2, 3, \cdots, 1996$을 각각 취하면 1996개의 포물선에 의하여 x축우에서 잘린 선분의 길이의 합은 $S_{1996}=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{1996}-\dfrac{1}{1997}\right)=1-\dfrac{1}{1997}=\dfrac{1996}{1997}$

2. $\frac{6}{5}$ 그림에서 AD를 맺으면 $AD \perp BC$이다. ∴ $AD=\sqrt{40-4}=6$, $CE \cdot CA=CD \cdot CB$이므로 $CE=\frac{4}{\sqrt{10}}$ ∴ $CE:AC=1:5$ ∴ $S_{\triangle CDE}=\frac{1}{5}S_{\triangle ADC}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times 2\times 6=\frac{6}{5}$

3. 22 3각형의 세변의 길이가 $a \le b \le c \le 9$, a, b, c는 모두 정의옹근수, $a+b > c$이라는데로부터

① $c=9$일 때 $1+3+5+7+9=25$개 있다.

② $c=8$일 때 $2+4+6+9=20$개 있다.

③ $c=7$일 때 $1+3+5+7=16$개 있다.

④ $c=6$일 때 $2+4+6=12$개 있다.

마찬가지로 하여 $c=5, 4, 3, 2, 1$일 때 각각 9, 6, 4, 2, 1 그러면 세변이 길이가 모두 9를 넘지 않는 옹근수이고 크기가 다른 3각형은 모두 $25+20+16+12+9+6+4+2+1=95$개이다. 2000개의 3각형중에서 크기가 같은 3각형은 적어도 $\left[\frac{2000}{95}\right]+1=22$개이다.

4. 306 $DE // AB$, $FG // BC$, $HI // CA$이므로 $AD=IP$, $GC=PH$, $CH=PG$, $BE=FP$이다. ∴ $DG=AC-(AD+DC)=510-d$, $EH=BC-(BE+HC)=450-d$

또한 $\triangle DPG \backsim \triangle ABC$, $\triangle PEH \backsim \triangle ABC$이므로

$$DP=\frac{AB}{CA}\cdot DG=\frac{425}{510}(510-d)=425-\frac{5}{6}d,$$

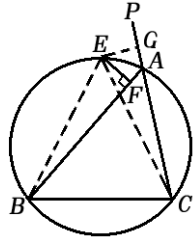
$$PE=\frac{AB}{BC}\cdot EH=\frac{425}{450}(450-d)=425-\frac{17}{18}d$$

두 식을 더하면 $d=DP+PE=850-\frac{16}{9}d$,

∴ $d=306$

Ⅲ. 풀이문제

1. E에서 AP에 그은 수직선의 밑점을 G라고 하고 BE, CE를 맺

자. 직3각형 AEF와 직3각형 AEG에서 $\angle EAF=\angle EAG$, AE는 함께 가지는 변이므로 $\triangle AEF\equiv\triangle AEG$ $\therefore$ $AF=AG$ $EF=EG$, $\triangle BEF$와 $\triangle CEG$에서 $\angle EBF=\angle ECA$, $EF=EG$, $\angle BFE=\angle CGE=90°$, $\therefore\triangle BEF\equiv\triangle CEG$, $\therefore BF=CG$, $\therefore AB-AF=AC+AG$, $AF=AG$이므로 $2AF=AB-AC$

2. 주어진 방정식으로부터

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2x-a=2(a-1)x-2a+10 & ①\\ 2(a-1)x-2a+10>0 & ②\end{cases}$$

(1) $a=1$일 때 유일한 풀이 $x=\dfrac{9}{2}$가 있다.

(2) $a\neq1$일 때 ①로부터 $(a-1)x^2+2(2-a)x+a-10=0$

판별식 $\triangle=4(2-a)^2-4(a-1)(a-10)=4(7a-6)$

(ㄱ) $\triangle=0$ 즉 $a=\dfrac{6}{7}$일 때 유일풀이 $x=\dfrac{a-2}{a-1}=8$

(ㄴ) $\triangle>0$ 즉 $a>\dfrac{6}{7}$일 때 ①로부터 두 풀이 $x=\dfrac{a-1\pm\sqrt{7a-6}}{a-1}$

이것을 ②의 왼변에 대입하면 $2(a-1)\cdot\dfrac{a-2\pm\sqrt{7a-6}}{a-1}-2a+10=6\pm2\sqrt{7a-6}$ 주어진 방정식이 유일풀이를 가지자면 반드시 두 풀이 중 한 풀이가 ②를 만족시켜야 한다. 그러면

$$\begin{cases}6+2\sqrt{7a-6}>0 & ③\\ 6-2\sqrt{7a-6}\leq0 & ④\end{cases}$$

$a>\dfrac{6}{7}$이면 ③은 늘 성립한다. 이때 ④의 풀이는 $a\geq\dfrac{15}{7}$, 우의 사실들을 종합하면 $a=\dfrac{6}{7}$, $a=1$또는 $a\geq\dfrac{15}{7}$일 때 주어진 방정식은 유일풀이를 가진다.

3. a_1, a_2, …, a_{998}을 1994보다 작은 임의의 998개의 서로 다른 자연수라고 하자. 이 수들중 a_1를 제일 작은 수라고 하자. 수 a_2-a_1, a_3-a_1, …, a_{998}은 1994보다 작은 1995개의 정수이다. 그러

므로 그중 적어도 두개는 같다. 그러나 앞의 997개의 수는 다 다르다. 뒤의 998개 역시 다 다르다. 그러면 반드시 $a_k - a_1 = a_m$, 만일 $n \neq 1$이면 $a_k = a_1 + a_n$, 만약 $n=1$이면 즉 $a_k - a_1 = a_1$이다. 이미 알고 있는 수중에서 $a_k - a_1$를 없애고 1994보다 1994개의 작은 자연수들을 얻으면 그것들중에서 적어도 두개는 같다. 즉 $a_p - a_1 = a_q$이다. $q \neq 1$(아니면 $a_p = a_k$) 이로부터 $a_p = a_1 + a_q$

시 험 33

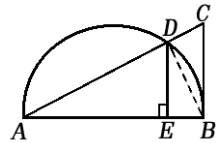
I. 선택문제

1. (ㄴ) $x=\dfrac{\sqrt{111}-1}{2} \Rightarrow 2x+1=\sqrt{111}$ 즉 $(2x+1)^2=111 \Rightarrow$ $2x^2+2x-55=0$ 즉 $\dfrac{\sqrt{111}-1}{2}$은 방정식의 풀이이다.

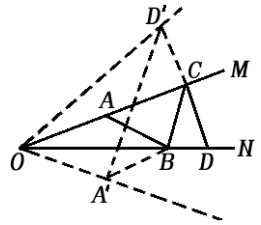
$y=[(2x^2+2x-55)(x^3+x-1)-1]^{1997}$은 $x=\dfrac{\sqrt{111}-1}{2}$일 때 $y=(-1)^{1997}=-1$

2. (ㄴ) 두 직각변의 길이 a, b에 대하여 $a+b=c+2r$와 $a^2+b^2=c^2$으로부터 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=\dfrac{1}{4}[(c+2r)^2-c^2]=cr+r^2$, $\therefore$ $\dfrac{S_{내접원}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{\pi r^2}{cr+r^2}=\dfrac{\pi r}{c+r}$.

3. (ㄱ) $m<-7$일 때 $(m+1)^2<m^2+m+7<m^2$이 성립한다. $m>6$일 때 $m^2<m^2+m+7<(m+1)^2$이 성립한다. 두 린접함수의 두제곱수사이의 옹근수는 완전두제곱수가 아니므로 m^2+m+7이 완전두제곱수로 되는 옹근수 m은 -7, -6, …, 5, 6에서 찾는다. 검증하면 $m=-7, 6, -2, 1$일 때 m^2+m+7은 완전두제곱수이다.

4. (ㄹ) BD를 맺으면 $AD \perp DB$이다. BC는 B에서 반원과 접하고 AB는 직경이므로 $CB \perp AB$이다. $BC=r$. $AB=2r$이므로 $AC=\sqrt{5}r$.

$BC^2=CD \cdot CA$이므로 $CD=\frac{\sqrt{5}}{5}r$, $AD=AC-CD=\frac{4\sqrt{5}}{5}r$, 그리고 $DE \perp AB$, ∴ $AC \cdot BD=AB \cdot BC$, 그러면 $BD=\frac{2\sqrt{5}}{5}r$. $AB \cdot DE=AD \cdot BD$이므로 $DE=\frac{4}{5}r$.

5. (ㄷ) 분모를 없애면 $2x^2-2x+1-a=0$, $\triangle \geq 0$ 즉 $(-2)^2-8(1-a)\geq 0 \Rightarrow a \geq \frac{1}{2}$, $x_1=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2a-1}\right)$, $x_2=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2a-1}\right)$, $x_1>0$이므로 $x_1 \neq 0$, -1. 주어진 방정식이 한개 실수뿌리를 가지자면 반드시 $x_2=0$ 또는 $\triangle=0$이여야 한다. (1) $x_2=0$일 때 $a=1$; (2) $x_2=-1$일 때 $a=5$; (3) $\triangle=0$일 때 $a=\frac{1}{2}$. 종합하면 $a=5$, 1, $\frac{1}{2}$일 때 주어진 방정식은 한개의 실수풀이만 가진다.

6. (ㄷ) ON, OM에 관한 두점 A, D의 대칭점을 A', D'라고 하고 $A'B$, CD', $A'D'$를 맺자. 그러면 $A'B=AB$, $CD'=CD$이므로 $AB+BC+CD \geq A'B+BC+CD'$, $A'B+BC+CD' \geq A'D'$, $\angle A'ON=\angle NOM=\angle MOD'=20°$이고 $\angle D'OA'=60°$, $OA'=OA-4\sqrt{3}$, $OD'=OD=8\sqrt{3}$이므로 $OD'=2 \cdot OA'$이다. ∴ $\triangle D'OA'$는 직3각형이고 $\angle OA'D'=90°$이다.

∴ $A'D'=\sqrt{(OD')^2-(OA')^2}=\sqrt{\left(8\sqrt{3}\right)^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}=12$,

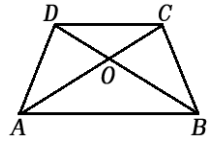
꺾임선 $ABCD$의 길이의 최소값은 12이다.

Ⅱ. 채우기문제

1. $\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}\leftrightarrow A$, $1\leftrightarrow B$, $x\leftrightarrow P$라고 하자. $y=|2x+1|+|x-1|=|x-1|+2\left|x+\frac{1}{2}\right|=2|PA|+|PB|\geq|PA|+|PB|\geq|AB|$, 만일 $P\equiv A$일 때 같기부호가 성립한다. $x=\frac{-1}{2}$일 때 y의 최소값은 $\frac{3}{2}$이다.

2. $\frac{1}{2}$　　$S_{\triangle COD}=S_1$, $S_{\triangle AOB}=S_2$이라고 하자. $S_{ABCD}=S$, $S_{\triangle AOD}$ $=S_{\triangle BOC}=\frac{2}{9}S$로부터 $S_1+S_2=S-2\times\frac{2}{9}S=\frac{5}{9}S$ ①

$\frac{S_1}{S_{\Delta BOC}}=\frac{OD}{OB}=\frac{S_{\Delta AOD}}{S_2}$이므로

$S_1\cdot S_2=S_{\triangle BOC}\cdot S_{\triangle AOD}=\frac{4}{81}S^2$ ②

① ②로부터 $\begin{cases} S_1+S_2=\frac{5}{9}S \\ S_1\cdot S_2=\frac{4}{81}S^2 \end{cases}$

$\triangle COD\backsim\triangle AOB$이므로 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{S_1}{S_2}$ ③

$a<b$이므로 $S_1<S_2$, 련립방정식의 풀이 $S_1=\frac{1}{9}S$, $S_2=\frac{4}{9}S$를 ③에 대입하면 $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$

3. 365　　문제의 뜻에 따라서 $(x^2-x+1)^6=a_{12}x^{12}+a_{11}x^{11}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$, 이 식은 항등식이므로 $x=1$을 취하면

$a_{12}+a_{11}+\cdots+a_2+a_1+a_0=1$ ①

$x=-1$을 취하면 $a_{12}-a_{11}+\cdots+a_2-a_1+a_0=729$ ②

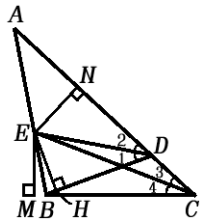
①+②로부터 $2(a_{12}+a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0)=730$

$\therefore$ $a_{12}+a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0=365$

4. 10°　　그림과 같이 점 E에서 BC, BD, AC에 그은 수직선의 밑점을 각각 M, H, N이라고 하자.

$\angle EBM=180°-100°=80°$이고

$\angle EBH=100°-20°=80°$이므로

$\therefore$ $\triangle EMB\equiv\triangle EHB$, $\therefore$ $EM=EH$ 그리고 $EM=EN$이므로 $EH=EN$, $\therefore$ $\angle1=\angle2$, $\angle3=\angle4$, $\angle DBC=20°$이므로 $\therefore$ $2\angle2=2\angle3+20°$, $\angle2=\angle3+10°$, $\therefore$ $\angle CED=10°$.

Ⅲ. 풀이문제

1. (1) $ap=2(b+q)$로부터 $q=\frac{ap}{2}-b$를 얻는다. 포물선 $y=x^2+px+q$에 대입하여 $-y+x^2-b+p\left(x+\frac{a}{2}\right)=0$을 얻는다.

$$\begin{cases} x+\frac{a}{2}=0 \\ -y+x^2-b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{a}{2} \\ y=\frac{a^2-4b}{2} \end{cases},$$

포물선 $y=x^2+px+q$는 정해진 점$\left(-\frac{a}{2}, \frac{a^2-4b}{4}\right)$를 지난다.

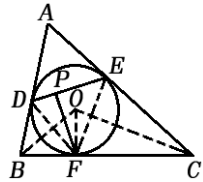
(2) $2q=ap-2b$로부터 $p^2-4q=p^2-2\cdot 2q=p^2-2(ap-2b)=p^2-2ap+4b=p^2-2ap+a^2-a^2+4b=(p-a)^2-(a^2-4b)$

∴ $(p^2-4q)+(a^2-4b)=(p-a)^2\geq 0$

∴ p^2-4q와 a^2-4b중 적어도 하나는 부수가 아니다.

∴ $x^2+ax+b=0$과 $x^2+px+q=0$가운데서 적어도 한 방정식은 실수풀이를 가진다.

2. DF, EF, OB, OF, OC를 맺으면 $OF\perp BC$, 이로부터 $\angle BOF=\angle DEF$, $\angle BFO=\angle FPE=90^\circ$,

∴ $\triangle BFO \backsim \triangle FPE$, $\frac{BF}{OF}=\frac{PF}{PE}$, 즉 $OF\cdot PF=BF\cdot PE$.

마찬가지로 $OF\cdot PF=CF\cdot DP$를 증명할수 있다. $BF=BD$, $CF=CE$이므로 $BD\cdot PE=CE\cdot DP$, $\angle BDP=\angle PEC$.

∴ $\triangle BDP\backsim\triangle PEC$, ∴ $\angle DBP=\angle PCE$

3. $q^2+\gamma=1993$, $\gamma\geq 0$이므로 $q\leq 44$. $\gamma=1993-q^2$.

만일 $q<43$이면 $\gamma\geq 1993-43^2=144$

$a^2+b^2=q(a+b)+\gamma$, $0\leq\gamma<a+b$라고 하자.

$a^2+b^2\geq 2ab$이므로 $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)=2q(a+b)+2\gamma$.

그러면 $(a+b)^2\leq 88(a+b)+2\gamma < 88(a+b)+2(a+b)=90(a+b)$

∴ $a+b<90$. 그러면 $\gamma=90$

또한 $q \le 44$이므로 $q=44$, $\gamma=1992-44^2=57$

그러면 $a^2+b^2=44(a+b)+57$, $\therefore (a-22)^2+(b-22)^2=1025$

a, b는 자연수, $a-22, b-22$은 옹근수이므로

$a-22, b-22$의 일의 자리수 0, 5 또는 1, 4 또는 6, 9

① $(a-22)^2, (b-22)^2$의 일의 자리수가 0, 5일 때

$$\begin{cases} a-22=\pm 20 \\ b-22=\pm 25 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} a-22=\pm 25 \\ b-22=\pm 20 \end{cases}$$

즉 (a, b)는 (42, 47) (2, 47) 또는 (47, 42) (47, 2)

② $(a-22)^2, (b-22)^2$의 일의 자리수가 1, 4일 때

$$\begin{cases} a-22=\pm 1 \\ b-22=\pm 32 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} a-22=\pm 8 \\ b-22=\pm 31 \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} a-22=\pm 32 \\ b-22=\pm 1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a-22=\pm 31 \\ b-22=\pm 8 \end{cases}$. 즉 (a, b)는 (23, 54), (21, 54), (30, 53), (14, 53) 또는 (54, 23), (54, 21), (53, 30), (53, 14).

③ $(a-22)^2, (b-22)^2$의 일의 자리수가 6, 9일 때 a, b는 존재하지 않는다. 종합하면 조건을 만족시키는 순서쌍은 12조이다.

시 험 34

I. 선택문제

1. (ㄹ) $x-\frac{1}{x}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=1$로부터

$x+\frac{1}{x}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=-\sqrt{5}$

주어진 식$=\sqrt{\frac{1}{x^2}\left(x-\frac{1}{2}\right)}-\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)}=$

$$=\sqrt{\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{x^3}=-\frac{1}{x}-x=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=\sqrt{5}$$

2. (ㄹ)　(1) $a=1$일 때 방정식은 $-x+2=0, x=2$

(2) $a\neq 1$일 때 방정식의 두 풀이를 x_1, x_2이라고 하면

$$\begin{cases}\Delta \geq 0 \\ x_1+x_2>0 \\ x_1x_2>0\end{cases} \text{ 즉 } \begin{cases}(2a-1)^2-4(a-1)(a+1)\geq 0 & ① \\ \dfrac{2a-1}{a-1}>0 & ② \\ \dfrac{a+1}{a-1}>0 & ③\end{cases}$$

①로부터 $a\leq\frac{5}{4}$; ②로부터 $a<\frac{1}{2}$ 또는 $a>1$; ③으로부터 $a<-1$ 또는 $a>1$. ∴ 부등식조의 풀이모임은 $a<-1$ 또는 $1<a\leq\frac{5}{4}$. 결국 종합하면 (1), (2)로부터 $a<-1$ 또는 $1\leq a\leq\frac{5}{4}$

3. (ㄷ)　문제의 그림으로부터 $EF//AB//CD$, $\triangle OEF \backsim \triangle OCD \backsim \triangle OAB$, $\triangle OCD$와 $\triangle OAB$는 모두 바른3각형이다. 왜냐하면

$$\frac{AB}{EF}=\frac{OA}{OE},\ \frac{CD}{EF}=\frac{OC}{OE}$$

$$\therefore\quad \frac{CD-AB}{EF}=\frac{OC-OA}{OE}=\frac{(OE+EC)-(EA-OE)}{OE}=\frac{2OE}{OE}=2.$$

$\therefore\quad CD-AB=2$　①

$S^2_{\Delta BOC}=S_{\Delta AOB}\cdot S_{\Delta COD}$ 로부터

$$\left(\frac{15}{4}\sqrt{3}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}CD^2$$

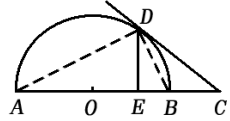
$\therefore\quad AB\cdot CD=15$　②

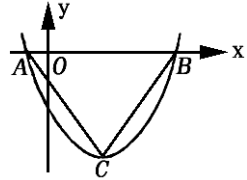
①, ②로부터 $AB=3, CD=5$를 얻는다.

$$\therefore\quad S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(AB+CD)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 8^2=16\sqrt{3}$$

4. (ㄴ)　$2x^2+y^2=6x$로부터 $y^2=6x-2x^2$을 얻는다. $y^2\geq 0$이므로 $6x-2x^2\geq 0$, ∴ $0\leq x\leq 3$ ∴ $x^2+y^2+2x=x^2+6x-2x^2+2x=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$, ∴ $x=3$일 때 최소값은 15이다.

5. (ㄱ)　AD, DB를 맺으면 AB가 직경이므로 $\angle ADB=90°$이

다. $AE:EB=4:1$이라고 하자. $AE=4a, EB=a$. △AED∽△DEB이므로 $\frac{AE}{ED}=\frac{DE}{EB}$, $DE=2a$이다. $BC=x$라고 하면

$$\begin{cases} x(x+5a)=4 \\ (2a)^2+(a+x)^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ a=\frac{3}{5} \end{cases}$$ 즉 $BC=1$.

6. (ㄴ) 포물선은 x축과 두점에서 사귀므로 △≥ 0 즉 $k^2+2k-3>0$, $|AB|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{k^2+2k-3}$, 정점 C의 세로자리표는 $-\frac{k^2+2k-3}{4}$, 그 절대값은 $\frac{k^2+2k-3}{4}$이다. 바른3각형의 변의 길이와 높이사이의 관계로부터 $\frac{k^2+2k-3}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{k^2+2k-3}$, $k^2+2k-3>0$이므로 $\sqrt{k^2+2k-3}=2\sqrt{3} \Rightarrow k^2+2k-3=12 \Rightarrow k^2+2k-15=0 \Rightarrow k=-5$ 또는 3

Ⅱ. 채우기문제

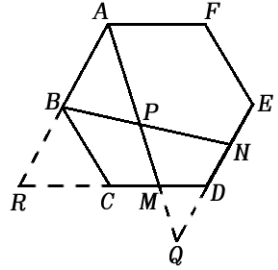
1. $\frac{a^2}{1-2a}$ $\quad \frac{x}{x^2+x+1}=a \Rightarrow \frac{x^2+x+1}{x}=\frac{1}{a} \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{1}{a}-1$

$$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}-1\right)^2-1}=\frac{1}{\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}}$$

$$=\frac{a^2}{1-2a}.$$

2. $\frac{6}{7}$ $\quad AM$과 ED의 연장선의 사귐점을 Q, AB와 DC의 연장선의 사귐점 R, $AB=1$이라고 하자. $BR=RC=1$. $CM=MD=\frac{1}{2}$. △DMQ∽△RMA이므로 $\frac{DQ}{RA}=\frac{MD}{MR}$,

$\therefore DQ = \frac{MD \cdot RA}{MR} = \frac{\frac{1}{2} \times 2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$,

$\therefore \quad NQ = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$, $\triangle ABP \backsim \triangle QNP$ 이므로 $\frac{BP}{PN} = \frac{AB}{NQ} = \frac{1}{\frac{7}{6}} = \frac{6}{7}$.

3. 2 또는 6 　$n > 6$ 이면 $3n(3n+1) < 9n^2+5n+26 < (3n+1)(3n+2)$ 이다. 그러면 $n \leq 6$ 이다. 검산하면 $n=2$ 일 때 $9n^2+5n+26=72=8 \times 9$, $n=6$ 일 때 $9n^2+5n+26=380=19 \times 20$ 그러면 $n=2$ 또는 6

4. $\frac{45}{4}$ 　대칭성에 의하여 접은자리 MN 은 대각선 AC 의 가운데점이며 점 O 에서 AC 와 수직이여야 한다. $\triangle AOM \backsim \triangle ABC$, $BC=9$, $AB=12$ 이므로 $AC=15$, $AO=\frac{15}{2}$, $MO=\frac{9}{12}AO=\frac{3}{4} \cdot \frac{15}{2}=\frac{45}{8}$,

$\therefore MN = \frac{45}{4}$

Ⅲ. 풀이문제

1. $a^3-3a^2+5a=1 \Rightarrow (a-1)^3+2(a-1)+2=0$, $b^3-3b^2+5b=5 \Rightarrow (b-1)^3+2(b-1)-2=0$,

$a-1=x$, $b-1=y$ 라고 하면 $x^3+2x+2=0$.

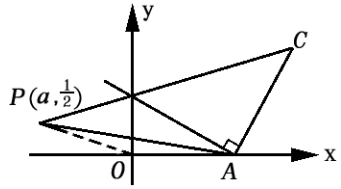
$y^3+2y-2=0$. 이 두 식을 더하면 $x^3+y^3+2(x+y)=0$,

$\Rightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2)+2(x+y)=0$

$\Rightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2+2)=0$

$\Rightarrow (x+y)\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}(x-y)^2+2\right]=0$

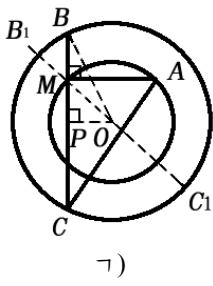
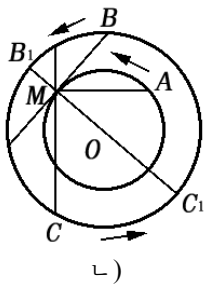
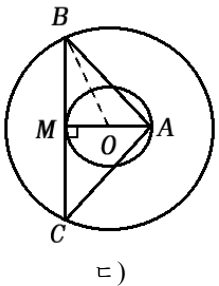
$\Rightarrow x+y=0 \Rightarrow (a-1)+(b-1)=0 \Rightarrow a+b=2$

2. x=0, y=0이라고 하자. 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$과 x축, y축과의 사귐점의 자리표는 $A(\sqrt{3},\ 0)$, $B(O\ -1)$ 즉 $OA=\sqrt{3}$, $OB=1$, ∴ $AB=2$(그림). △ABC는 2등변3각형이다. $S_{\triangle ABC}=2$, $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABC}$이므로 $S_{\triangle ABP}=2$, PO를 맺으면 $S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $S_{\triangle BOP}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-a)=-\frac{a}{2}$, $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ∵ $S_{\triangle BOP}+S_{\triangle AOB}-S_{\triangle AOP}=S_{\triangle ABP}$,

$$\therefore\quad -\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=2,\quad \therefore\quad a=\frac{\sqrt{3}-8}{2}$$

3. 특수점을 리용하여 일정한 값을 구한다. 그림 ㄱ)에서 MA는 작은 원의 직경이다. $MA\perp BC$로부터 $MB=MC$, $AB=AC$, OB를 맺고 두 원의 반경을 각각 R, $r(R>r)$라고 하자. $AB^2+BC^2+CA^2=2AB^2+4MB^2=2[(2r)^2+MB^2]+4MB^2=8r^2+6MB^2=6(r^2+MB^2)+2r^2=6R^2+2r^2$ 운동법을 리용하여 고정된 값을 구하자(그림 ㄴ).
MA는 작은원의 활등이 되게 한후 A가 작은 원주를 따라 M방향으로 운동하면 MA는 M을 지나는 작은 원의 접선이고 활등 B_1MC_1는 큰원의 직경으로 된다. 따라서 $AB^2+BC^2+CA^2=MB_1^2+B_1C_1^2+C_1M_1^2=(R-\gamma)^2+(2R)^2+(R+\gamma)^2=6R^2+2\gamma^2$

ㄷ)

ㄴ)

ㄱ)

증명: 그림 ㄷ)에서 M을 지나는 큰원의 직경을 B_1C_1, O를 지나 BC에 그은 수직선과의 사귐점을 P라고 하고 OB를 맺는다.

$OP=x$라고 하면 $MA=2x$, 그러면

$AB^2=MB^2+(2x)^2$ ①

$CA^2=MC^2+(2x)^2$ ②

$BC^2=(2PB)^2=4(OB^2-OP^2)=4(R^2-x^2)$ ③

$BC^2=(MB+MC)^2=MB^2+MC^2+2MB\cdot MC$

$=MB^2+MC^2+2MB_1MC_1, MB^2+MC^2+2(R-\gamma)(R+\gamma)$ ④

우의 4개 식으로부터 $AB^2+BC^2+CA^2=6R^2+2\gamma^2$(고정값)

시 험 35

I. 선택문제

1. (ㄴ) $\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}+(2n-1)\sqrt{2n+1}}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n+1)\sqrt{2n-1}+(2n-1)\sqrt{2n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\sqrt{2n+1}\right)^2-\left(\sqrt{2n-1}\right)^2}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n-1}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}\cdot\sqrt{2n-1}}\right]$$

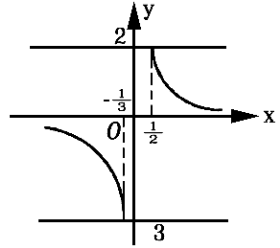
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$$

$n=1, 2, 3, \cdots, 40$을 넣으면

주어진 식$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{79}}-\frac{1}{\sqrt{81}}\right)\right]$

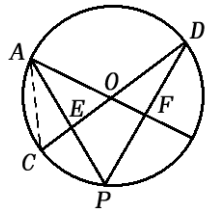
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{81}}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{4}{9}$$

2. (ㄷ) 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그라프를 그리면 이 그라프로부터 x의

값범위는 $x < -\frac{1}{3}$ 또는 $x > \frac{1}{2}$

3. (ㄷ) $\triangle ABE \equiv \triangle CAD$를 쉽게 알수 있다. ∴ $\angle ABE = \angle CAD$, ∴ $\angle BPD = \angle ABE + \angle BAP = \angle CAD + \angle BAP = \angle BAC = 60°$, $BQ \perp AD$이므로 ∴ $\angle PBQ = 30°$, ∴ $BP = 2PQ = 2 \times 3 = 6$, ∴ $AD = BE = BP + PE = 6 + 1 = 7$

4. (ㄱ) 문제설정에 따라 $-\frac{2}{a^2}$와 b^2은 방정식 $x^2 + x - 3 = 0$의 두 풀이이므로 $-\frac{2}{a^2} = x_1$, $b^2 = x_2$이라고 하자. $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 x_2 = -3$, $\frac{a^4 b^4 + 4}{a^4} = b^4 + \frac{4}{a^4} = \left(-\frac{2}{a^2}\right)^2 + \left(b^2\right)^2 = x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1 x_2 = (-1)^2 - 2(-3) = 7$

5. (ㄴ) 닮은도형의 비례관계로부터 $EA = \frac{1}{4}DJ$, $EB = \frac{2}{3}DJ$, $EA = \frac{3}{2}CJ$이다. $CJ = 2$라고 하면 $EA = 3$, $DJ = 12$, $EB = 8$, $AB = 5$, $CD = 10$, ∴ $\frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$

6. (ㄱ) $\overset{\frown}{AC} = 60°$, CD는 직경이므로 $\overset{\frown}{AOD} = 120°$, ∴ $\angle APD$와 $\angle EOF$는 서로 보탬각이고 네점 O, E, P, F는 한 원둘레에 놓인다. AC를 맺으면 $AC = AO = OD$, 그리고 $\angle CAP = \angle D$이므로 $\triangle ACE \equiv \triangle DOF$, ∴ $OF = CE$. 이로부터 $AE \cdot AF + DF \cdot DP = AO \cdot AF + DO \cdot DE = r(r + OF) + r(r + OE) = r(2r + OE + OF) = r(2r + OE + CE) = r \cdot 3r = 3r^2$

Ⅱ. 채우기문제

1. 1 $B(x_1, 0)$, $C(x_2, 0)$이라고 하자. x_1, x_2은 방정식 $-x^2 - mx + m + 2 = 0$의 두 실수풀이이므로 $x_1 + x_2 = m$, $x_1 x_2 = -(m+2)$, $|BC| = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{m^2 + 4m + 8}$이다.

또한 정점의 세로자리표는 $\frac{m^2+4m+8}{4}$ 이므로 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+4m+8}\cdot\frac{m^2+4m+8}{4}$, $m^2+4m+8=(m+2)^2+4$, $m=-2$일 때 $\triangle ABC$의 면적은 최소 1로 된다.

2. $\frac{3}{2}$ 또는 $\frac{3}{10}$ $DE=x$라고 하자. 직3각형 BED∽직3각형 BAC이므로 $\frac{BE}{ED}=\frac{BA}{AC}=\frac{3}{4}$, ∴ $BE=\frac{3}{4}x$, 직3각형 GFC∽직3각형 BAC이므로 $\frac{FC}{GF}=\frac{AC}{BA}=\frac{4}{3}$이다. ∴ $FC=\frac{4}{3}x$, $AB=3$, $AC=4$이므로 $BC=5$, $EF=5-(BE+FC)=5-\frac{25}{12}x$ 또한 $ED\cdot EF=\frac{5}{3}$이므로 $x\left(5-\frac{25}{12}\right)x=\frac{5}{3}\Rightarrow 5x^2-12x+4=0\Rightarrow ED=\frac{2}{5}$ 또는 $ED=2\Rightarrow BE=\frac{3}{2}$ 또는 $\frac{3}{10}$

3. 12 $2^8+2^{11}+2^n=m^2(m\in N)$ 이라고 하자. 그러면 $2^n=m^2-(2^8+2^{11})=m^2-2^8(1+2^3)=m^2-(3\cdot16)^2=(m+48)(m-48)$이다. $m+48=2^x$, $m-48=2^y\ (x,\ y\in N)$이라고 하면 $x>y$, $x+y=n$이고 $2^x-2^y=96$ 이다.

$$2^y(2^{x-y}-1)=96=2^5\times3\Rightarrow\begin{cases}2^y=2^5\\2^{x-y}-1=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=7\\y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=12\\m=80\end{cases}.$$

4. 7 $EC=x$, $BE=y$, $ED=z$라고 하자. $\triangle DCE$∽$\triangle ACD$, 이로부터 $\frac{CD}{CA}=\frac{EC}{DC}$ 즉 $\frac{4}{6+x}=\frac{x}{4}$, 풀면 $x=2$($x=-8$은 풀이가 아니다). 또한 $AE\cdot EC=BE\cdot ED$이므로 $yz=6\cdot2=12$

그러나 $\triangle BCD$에서 $y+z<4+4=8$이므로 정의옹근수풀이가

$\begin{cases}y=3\\z=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}y=4\\z=3\end{cases}$ 으로 얻어진다. 이때 $BD=y+z=7$이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. x_1, x_2이 방정식의 옹근수풀이이면 $x_1+x_2=pq$, $x_1x_2=p+q$이다. $p, q\in N$으로부터 $x_1, x_2\in N$

두 식을 덜면 $(x_1-1)(x_2-1)+(p-1)(q-1)=2$.

(1) 왼변의 첫항이 0, 둘째 항이 2인 경우

$\begin{cases} p-1=1 \\ q-1=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} p-1=2 \\ q-1=1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} p=2 \\ q=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} p=3 \\ q=2 \end{cases}$

이때 주어진 방정식은 $x^2-6x+5=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=5$이다.

(2) 두 항이 모두 1인 경우

$\begin{cases} p-1=1 \\ q-1=1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} p=2 \\ q=2 \end{cases}$

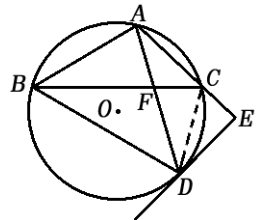
이때 주어진 방정식은 $x^2-4x+4=0 \Rightarrow x_1=x_2=2$

(3) 왼변 첫항이 2, 둘째 항이 0인 경우

$\begin{cases} x_1-1=1 \\ x_2-1=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x_1-1=2 \\ x_2-1=1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=3 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} p=1 \\ q=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} p=5 \\ q=1 \end{cases}$

2. CD를 맺으면 $AB:AC=3:2$이므로 $AB=3x$, $AC=2x$, $CE=y$라고 하면 $DE=6-y$이다. $\triangle CDE \backsim \triangle BAD$이므로 $\frac{CE}{BD}=\frac{CD}{BA}$, 즉 $\frac{y}{3\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{3x}$, $xy=6$ 그리고 $DE^2=EC\cdot EA$로부터 $(6-y)^2=y(y+2x)$, $36-12y+y^2=y^2+2xy$, $36-12y=12$, $y=2$, $x=3$, $\frac{CF}{DE}=\frac{AC}{AE}$로부터 $\frac{CE}{6-2}=\frac{2\times 3}{2\times 3+2}$, $\frac{CF}{4}=\frac{6}{8}$, $CF=3$이다.

$BF:FC=AB:AC=3:2$이므로 $BF=\frac{3}{2}FC=\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{2}$

3. 그림에서 2차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그라프와 x축은 한개 사귐점 P만을 가진다. $\therefore$ $p\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$. 그리고 그라프와 y축의 사귐

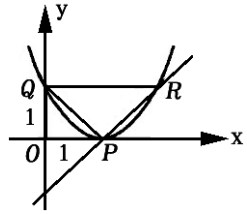
점 $Q(0, C), b+2ac=0$ 즉 $-\frac{b}{2a}=C$이므로 $P(C, 0)$, $PQ=2\sqrt{2}$ 와 $a>0$, ∴ $C=2$ 즉 $P(2, 0)$, $Q(0, 2)$. 1차함수 $y=x+m$의 그라프가 점 P를 지나므로 $0=2+m$을 얻는다. ∴ $m=-2$, 그러면 1차함수의 해석식은 $y=x-2$이고 2차함수의 해석식은 $y=ax^2+bx+2$, 그러면 $-\frac{b}{2a}=2$이고 $0=4a+2b+2$이다. 풀이는 $a=\frac{1}{2}, b=-2$, 그러므로 2차함수의 해석식은 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+2$

풀이

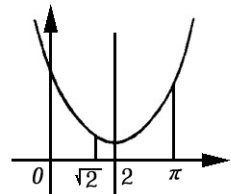
$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-2x+2 \\ y=x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ y_1=0, \end{cases} \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=2 \end{cases}$$

∴ $R(4, 2)$, $PR=2\sqrt{2}$, $QR=4$,

$PQ=PR, PQ^2+PR^2=QP^2$이므로 $\triangle PQR$는 직2등변3각형이다.

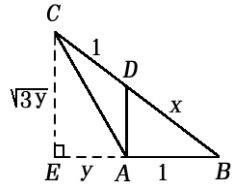
∴ $S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2=4$

시 험 36

I. 선택문제

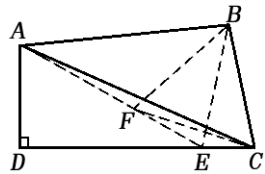
1. (ㄴ) 두제곱뿌리의 성질로부터 오른쪽 끝은 $y<a<x$이고 왼쪽 끝은 $a\geq 0$, $a\leq 0$이므로 $a=0$이다. 이로부터 $x=-y$를 얻는다. 대입하여 계산하면 $\frac{1}{3}$을 얻을수 있다.

2. (ㄱ) 포물선은 축대칭인 곡선이라는데로부터 알수 있다.

3. (ㄷ) 그림에서 C를 지나며 AB에 수직인 선 CE를 그으

면 BA의 연장선은 E에서 사귄다. $BD=x$, $EA=y$라고 하면 다음의 두 식을 얻을수 있다.

$$\begin{cases} \frac{x}{1}=\frac{1}{y} & ① \\ (x+1)^2=(y+1)^2+(\sqrt{3}y)^2 & ② \end{cases}$$

①로부터 $y=\frac{1}{x}$을 얻고 이것을 ②에 대입하면 $(x+2)(x^3-2)=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{2}$ 를 얻을수 있다. 즉 $BD=\sqrt[3]{2}$

4.(ㄴ) $2x+1=t(t\in Z)$라고 하자. $x=\frac{t-1}{2}$, $3x-4\frac{5}{6}=\frac{3}{2}t-6\frac{1}{3}$ 이면 주어진 방정식은 간단히 $\left[\frac{3}{2}t-6\frac{1}{3}\right]=t$, $t\le\frac{3}{2}t-6\frac{1}{3} < t+1$, $12\frac{2}{3}\le t < 14\frac{2}{3}$로 된다. $t\in Z$이므로 $t=13$ 또는 14이다. 따라서 $x=6$ 또는 $6\frac{1}{2}$

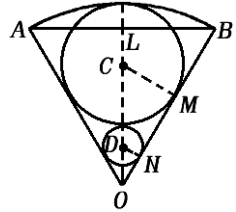
5.(ㄴ) 이제 $\angle DAE=60°$되게 $\angle CAD$를 분할하면 쉽게 증명할수 있다. E는 DC우에 있고 $AB=AE$를 얻을수 있다. $\angle CBF=60°$ 되게 CF, BE를 맺으면 $\triangle ABE$와 $\triangle BEF$는 모두 뾰족각이 36°인 2등변3각형이라는것을 알수 있다. $\triangle BCF$는 바른3각형이다. ∴ $\angle CFE=12°$, $\angle CAF=6°$, $\angle CAD=60°+6°=66°$

6. (ㄴ) $y=a(x-1)(x-5)$이다. $y\le 2x$ 즉 $a(x-1)(x-5)\le 2x$, $ax^2-2(3a+1)x+5a\le 0$이라고 하자. 그러면

$$\begin{cases} a<0 \\ \Delta\ge 0 \end{cases} \text{ 즉 } \begin{cases} a<0 & ① \\ 4(3a+1)^2-4\cdot a\cdot 5a\le 0 & ② \end{cases}$$

②로부터 $4a^2+6a+1\le 0\Rightarrow a_1\le a\le a_2$(그중 a_1, a_2은 모두 0보다 작다. $a_1a_2=\frac{1}{4}$) 정점의 세로자리표가 $f(3)=-4a$, 정점의 세로자리표의 최대값과 최소값의 적은 $(-4a_1)(-4a_2)=16a_1a_2=16\times\frac{1}{4}=4$

Ⅱ. 채우기문제

1. $1 \le a \le 9$　　문제설정으로부터 $bc=a^2-8a+7, (b+c)^2=6a-6+bc=6a-6+a^2-8a+7=a^2-2a+1=(a-1)^2$, $b+c+(a-1)$을 얻을수 있다. 그러면 b, c는 방정식 $x^2 \pm (a-1)x+a^2-8a+7=0$의 두 실수풀이이다. $\triangle \ge 0 \Rightarrow (a-1)^2-4(a^2-8a+7) \ge 0 \Rightarrow a^2-10a+9 \le 0 \Rightarrow 1 \le a \le 9$

2. 2　　그림에서 보여주는바와 같이 보조선을 더 설정하고 원 O와 원 D의 반경을 각각 x, y라고 하자. $OC=x-6$, $\triangle OLB \backsim \triangle OMC$로부터 $\frac{OB}{OC}=\frac{LB}{CM}$ 즉 $\frac{x}{x-6}=\frac{9}{6} \Rightarrow x=18, OC=12, OD=6-y$, 그리고 $\triangle OND \backsim \triangle OMC$이므로 $\frac{OD}{OC}=\frac{DN}{CM}$, 즉 $\frac{6-y}{12}=\frac{y}{6} \Rightarrow y=2$, 즉 원 D의 반경은 2이다.

3. $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$　　$\because$　$\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2}$

$=\sqrt{6-2\sqrt{9-5}}=\sqrt{2}$

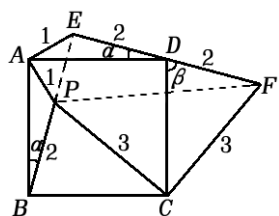
$\therefore$ $a=\sqrt{2}-1$.

$\because$　$\sqrt{6+3\sqrt{3}}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{6+3\sqrt{3}}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{12-2\sqrt{36-27}}$

$=6$

$\therefore$　$b=\sqrt{6}-2$

그러면 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{6}-2}=\sqrt{2}+1-\frac{\sqrt{6}+2}{2}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

4. $5+2\sqrt{2}$　　$\triangle PAB$를 점 A주위로 시계바늘과 반대방향으로 $90°$ 회전시켜 $\triangle EAD$를 얻는다. $\triangle PBC$를 점 C주위로 시계바늘방향으로 $90°$ 회전시켜 $\triangle FDC$를 얻는다. PE, PF를 맺고 $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$와 $\gamma+\delta$

$=90°$, $\angle ADC=90°$이므로

$\alpha+\angle ADC+\beta=180°$, ∴ 세점 E, D, F는 한 직선에 놓인다. PE, PF를 맺으면 $\triangle PAE$와 $\triangle PCF$는 모두 2등변직3각형으로 된다.

$$\therefore \quad S_{\triangle PAE}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}, S_{\triangle PCF}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=\frac{9}{2},$$

$\triangle EPF$에서 $EP=\sqrt{2}$, $PF=3\sqrt{2}$, $EF=ED+DF=2+2=4$, $(\sqrt{2})^2+4^2=(3\sqrt{2})^2$ 이므로

$\angle PEF=90°$,

$$\therefore \quad S_{\triangle EPF}=\frac{1}{2}EP\cdot EF=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 4=2\sqrt{2}$$

$$S_{ABCD}=S_{APCFE}=S_{\triangle PAE}+S_{\triangle PCF}+S_{\triangle EPF}=\frac{1}{2}+\frac{9}{2}+2\sqrt{2}=5+2\sqrt{2}$$

Ⅲ. 풀이문제

1. 방정식의 두 풀이를 x_1, x_2이라고 하자.

$x_1\cdot x_2=\frac{1}{a}>0$으로부터 $a>0$이라는것을 알수 있다.

그리고 $f(0)=1$이므로 문제에 의해

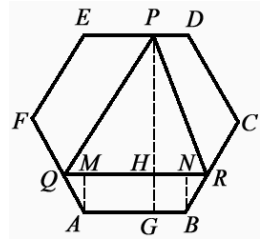
$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0 & ① \\ 0<-\dfrac{b}{2a}<1 & ② \\ f(1)=a+b+1>0 & ③\end{cases}$$

a는 정의옹근수이므로 ②, ③으로부터 $-(a+1)<b<0$을 얻을수 있다.

따라서 ①로부터 $b<-2\sqrt{a}$

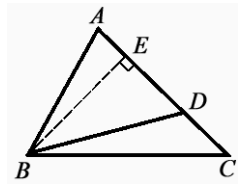
$$\therefore \quad -(a+1)<b<-2\sqrt{a} \qquad ④$$

$a=1, 2, 3, 4$일 때 식 ④를 만족시키는 옹근수 b는 존재하지 않는다. $a=5$일 때 $b=-5$이다. 이때 방정식은 $5x^2+5x+1=0$. 이 방정식의 두 풀이 $x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{10}$는 0과 1사이에 있다. 그러면 a의 최소값은 5이다.

2. 그림에서 $\triangle PQR$의 최대면적을 얻자면 P는 DE우에 있어야 하며 Q, R는 각각 AF, BC우에 있어야 한다. P를 지나며 QR에 그은 수직선과 사귀는 점을 H라고 하면 이 수직선은 AB와 G에서 사귄다. A, B를 지나며 QR에 수직인 선을 그을 때 QR와 사귀는 점은 각각 M, N이다. $PH=x$라고 하면 $HG=\sqrt{3}-x$, $QM=NR=AM\cdot\tan30°$

$$=\left(\sqrt{3}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}x,\ QR=2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)+1=3-\frac{2}{3}\sqrt{3}x$$

$$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}\left(3-\frac{2}{3}\sqrt{3}x\right)x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2+\frac{9\sqrt{3}}{16}$$

$x=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, 즉 Q, R는 각각 AF, BC의 가운데점이라고 할 때 $S_{\triangle PQR}$의 최대값은 $\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$이다.

3. 조건에 관계없이 $AD=2$라고 하면 $DC=1$이다. B에서 AC에 그은 수직선과 AC와의 사귐점을 E라고 하고 $ED=x$라고 하자. $\angle EDB=60°$이므로 $BE=\sqrt{3}x$, 그리고 $\angle ECB=45°$이므로 $BE=EC=1+x$

$$\therefore\quad 1+x=\sqrt{3}x,\quad x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

직3각형 AEB에서 $BE=\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}$, $AE=AD-ED=2-x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$이다.

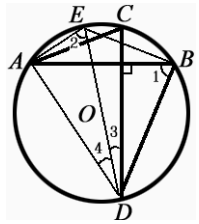
$\therefore\ AB^2=AE^2+BE^2=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2=6=AD\cdot AC$이다. $\therefore\ AB$는 $\triangle BCD$의 외접원의 접선이다.

시 험 37

I. 선택문제

1. (ㄴ) $P^2 - Q^2 = ab + 2\sqrt{abcd} + cd - \left(ab + \frac{nbc}{m} + \frac{mad}{n} + cd\right) = -\left(\sqrt{\frac{nbc}{m}} - \sqrt{\frac{mad}{n}}\right)^2 \le 0$이므로 $P^2 \le Q^2$, $P > 0$, $Q > 0$이므로 $P \le Q$

2. (ㄷ) 열린방향아래에서 $a < 0$, $\frac{-b}{2a} = -1$로부터 $b = 2a < 0$을 얻는다. 포물선은 x축과 부의 반축에서 사귄다는데로부터 $c < 0$ 따라서 $abc < 0, 2a - b = 0, 9a - 4b = 9a - 4 \times 2a = a < 0$ 포물선과 x축은 두점에서 사귄다는데로부터 $b^2 - 4ac > 0$, $a + b + c = f(1) < 0$, $a - b + c = f(-1) > 0$. 이로부터 (ㄷ)를 선택한다.

3. (ㄷ) 직경 DE를 긋고 AD, BE, AE를 맺으면 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle EAD = 90^\circ$, $AB \perp CD$. ∴ $\angle 3 = \angle 4$, $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AE}$, $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{AC}$, $BE = AC$. ∴ $AC^2 + BD^2 = BE^2 + BD^2 = DE^2 = d^2$

4. (ㄹ) $(x, y) = d$라고 하자. $x = da, y = db, (a, b) = 1$을 대입하면 $19a + 93b = 4dab$를 얻는다. ∴ $a|93b$, $b|19a$.

∴ $a = 1, 3, 31, 93$, $b = 1$ 또는 19, $19a + 93b = 4dab$는 4로 완제된다는데로부터 다음의것을 얻을수 있다.

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ a_1 = 1 \\ d_1 = 28 \end{cases}, \begin{cases} b_2 = 1 \\ a_2 = 93 \\ d_2 = 5 \end{cases}, \begin{cases} b_3 = 19 \\ a_3 = 3 \\ d_3 = 8 \end{cases}, \begin{cases} b_4 = 19 \\ a_4 = 31 \\ d_4 = 1 \end{cases},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 28 \\ y_1 = 28 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 465 \\ y_2 = 5 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = 24 \\ y_3 = 152 \end{cases}, \begin{cases} x_4 = 31 \\ y_4 = 19 \end{cases},$$

5. (ㄴ) $AE = x, AF = y$라고 하면 $EF = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}xy = \frac{6}{25}a^2 & ① \\ (a-x)+2a+(a-y)+\sqrt{x^2+y^2} = \frac{9}{10}\cdot 4a & ② \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy = \frac{12}{25}a^2 & ③ \\ x+y = \frac{2}{5}a+\sqrt{x^2+y^2} & ④ \end{cases}$$

식 ④의 두 변을 두제곱하면

$$25xy+2a^2=10a(x+y) \quad ⑤$$

식 ③을 ⑤에 대입하면

$$14a^2=10a(x+y) \Rightarrow x+y=\frac{7}{5}a \quad ⑥$$

식 ⑥을 ④에 대입하면 $\sqrt{x^2+y^2}=a$

∴ $\triangle AEF$의 둘레의 길이$=x+y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{7}{5}a+a=\frac{12}{5}a$

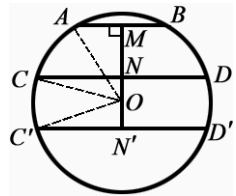
6. (ㄱ) 문제설정으로부터 $\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x}=1,\ x+\frac{1}{x}=\sqrt{2}+1,$

$$\frac{x^6-2\sqrt{2}x^3+1}{x^3}=x^3-2\sqrt{2}+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\sqrt{2}$$

$$=\left(\sqrt{2}+1\right)^3-3\left(\sqrt{2}+1\right)-2\sqrt{2}=4$$

따라서 주어진 식은 $\frac{1}{4}$이다.

Ⅱ. 채우기문제

1. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}R$ 또는 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}R$ 　그림에서 활줄 중심까지의 거리가 OM, ON이고 O, M, N은 한 직선에 놓인다. 직3각형 AMO에서 $AM=\frac{1}{2}R$이다. 따라서 $OM=\frac{\sqrt{3}}{2}R$이다.

직3각형 ONC에서 $ON=\sqrt{R^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2}=\frac{1}{2}R$

$\therefore$ $MN=\frac{\sqrt{3}-1}{2}R$ 이고 $MN'=\frac{\sqrt{3}+1}{2}R$

2. -1 $\frac{x+(x+1)+(x+2)+(x+3)}{4}=x+\frac{3}{2}=t$ 라고 하자.

그 러 면 $y=\left(t-\frac{3}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(t+\frac{3}{2}\right)=t^4-\frac{5}{2}t^2+\frac{9}{16}=\left(t^2-\frac{5}{4}\right)^2-1$,

따라서 y의 최소값은 -1이다.

3. $2\sqrt{22}$ $AH(AH+7)=AG\cdot AF=2\times 15$ 이 므 로 $AH=3$, $AB=AC$이므로 $BI=6, BD=x, CE=y$라고 하면

$$\begin{cases} x(16-y)=6\cdot 13 \\ y(16-x)=1\cdot 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10-\sqrt{22} \\ y=6-\sqrt{22} \end{cases} \Rightarrow DE=16-(x+y)=2\sqrt{22}$$

4. $\frac{3}{4}\le m\le 7$ $\begin{cases} \Delta\ge 0 \\ |\alpha|+|\beta|\le 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1)^2-4(1-m)\ge 0 \\ \alpha^2+\beta^2+2|\alpha\beta|\le 25 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ge\frac{3}{4} \\ (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|\le 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ge\frac{3}{4} \\ 1^2-2(1-m)+2|1-m|\le 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ge\frac{3}{4} \\ |1-m|-(1-m)\le 12 \end{cases}.$$

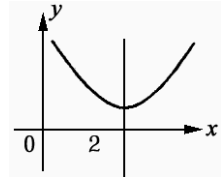
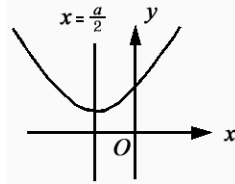
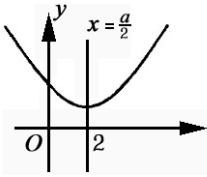
(1) $\frac{3}{4}\le m\le 1$일 때 $1-m-(1-m)\le 12$, $\therefore$ $\frac{3}{4}\le m\le 1$

(2) $m>1$일 때 $m-1-(1-m)\le 12, m\le 7$, $\therefore$ $1<m\le 7$, 따라서 m의 값범위는 $\frac{3}{4}\le m\le 7$이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. $y=4\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+2-2a$ 대칭축 $x=\frac{a}{2}$

(1) $0 \le \frac{a}{2} \le 2$, 즉 $0 \le a \le 4$일 때 $2-2a=3 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$(제거);

(2) $\frac{a}{2} < 0$, 즉 $a < 0$일 때 $f(0)=3$이라고 하면 $a^2-2a+2=0 \Rightarrow a=1\pm\sqrt{2}$, 따라서 $a=1-\sqrt{2}$

(3) $\frac{a}{2} > 2$ 즉 $a > 4$일 때 $f(2)=3$ 즉 $a^2-10a+15=0 \Rightarrow a=5\pm\sqrt{10}$. 따라서 $a=5+\sqrt{10}$. 종합하면 $a=1-\sqrt{2}$ 또는 $5+\sqrt{10}$

2. $x^2-xy+y^2=k$라고 하자.

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=1 \\ x^2-xy+y^2=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\frac{1+k}{2} \\ 2xy=1-k \end{cases}$$

그러면 $(x+y)^2=\frac{3-k}{2}$,

$(x+y)^2 \ge 0$이므로 $k \le 3$, 그리고 $x^2+y^2 \ge 2xy$이므로

$\frac{1+k}{2} \ge 1-k$, $\therefore \quad k \ge \frac{1}{3}$

따라서 $\frac{1}{3} \le k \le 3$. 즉 $\frac{1}{3} \le x^2-xy+y^2 \le 3$

3. 그림에서 $\angle EAD=\angle DCF=60°$, $\angle EDA=\angle DFC$이므로 $\triangle ADE \backsim \triangle CFD$

$\therefore \quad \frac{AE}{AD}=\frac{CD}{CF}$, $\frac{AE}{AC}=\frac{AC}{CF}$

그리고 $\angle EAC=\angle ACF=120°$이므로 $\triangle ACE \backsim \triangle CFA$,

$\therefore \quad \angle FAC=\angle CEA$

$\triangle ACE$는 $\triangle CAM$과 $\triangle CEA$의 공통각이므로 $\triangle CAM \backsim \triangle CEA$

$\therefore \quad \frac{CA}{CE} = \frac{CM}{CA}$

$\therefore \quad CA^2 = CE \cdot CM$

시 험 38

I. 선택문제

1. (ㄱ) 문제설정으로부터 $a = \frac{1}{2}$ $\therefore$ $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$

또한 그라프는 점 $C(-1, 0)$과 $D\left(0, \frac{5}{2}\right)$를 지난다. 따라서

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - b + c = 0 \\ c = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = 5 \end{cases}$$

$\therefore \quad y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}$, $y = 0$ 이라고 하면

$x_1 = -1, x_2 = -5$

$\therefore \quad |AC| = 4$ 정점의 세로자리표는 2이다.

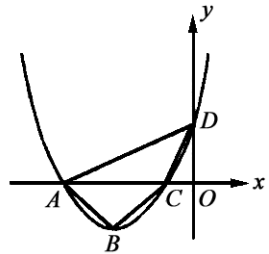
$\therefore \quad S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{5}{2} = 9$

2. (ㄴ) $\sqrt{7} + \sqrt{3} = x$, $\sqrt{7} - \sqrt{3} = y$라고 하면

$$\begin{cases} x + y = 2\sqrt{7} \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ xy = 4 \end{cases}$$

$\therefore \quad x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)^3 - 3x^2y^2(x^2 + y^2) = 20^3 - 3 \cdot 4^2 \cdot 20 = 7040$

즉 $(\sqrt{7} + \sqrt{3})^6 + (\sqrt{7} - \sqrt{3})^6 = 7040$, 또한 $0 < \sqrt{7} - \sqrt{3} < 1$이므로 $0 < (\sqrt{7} - \sqrt{3})^6 < 1$ 따라서 $(\sqrt{7} + \sqrt{3})^6$을 넘지 않는 최대옹근수는 7039 이다.

3. (ㄹ) DP를 맺자. $S_{\triangle BDP} = S_{\triangle BDC} - S_{\triangle BPC} - S_{\triangle DPC} = \frac{1}{2} -$

$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{1}{4}=\frac{1}{8}$,

$S_{\triangle EDP}=2S_{\triangle BDF}$이므로 $S_{\triangle BDF}=\frac{1}{16}$, F에서 BD까지의 거리를 h 라고 하면 $\frac{1}{2}BD\cdot h=\frac{1}{16}$로부터 $h=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{16}$

4.(ㄴ) 방정식은 두개의 실수풀이를 가진다는데로부터 $\triangle=(-2k)^2-4(k+6)=4(k+2)(k-3)\geq 0 \Rightarrow k\leq -2$ 또는 $k\geq 3$. $y=(a-1)^2+(b-1)^2$이라고 하면 $y=(a+b)^2-2ab-2(a+b)+2$.

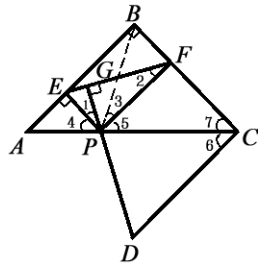
$\therefore a+b=2k, ab=k+6$, $\therefore y=4k^2-6k-10=4\left(k-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{49}{4}$

$k=3$일 때 y의 최소값은 8이다.

5.(ㄷ) 그림에서 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$, $\angle 4=\angle 5=45^\circ$이므로

$\angle 1+\angle 4=\angle 3+\angle 5$, $\therefore \angle APG=\angle BPC$. 그리고 $\angle APG=\angle DPC$이므로 $\angle BPC=\angle DPC$이다. $BP=DP$, PC는 공통선, $\therefore \triangle BPC\equiv\triangle DPC$

$\therefore$ $BC=DC$, $\angle 6=\angle 7=45^\circ$

$\angle BCD=\angle 6+\angle 7=45^\circ+45^\circ=90^\circ$ 그러면 BC와 DC는 서로 같고 수직이다.

6.(ㄹ) $3x^2y^2+x^2-30y^2-10=507$, $(x^2-10)(3y^2+1)=507$, $507=3\times 13^2$

$$\begin{cases}3y^2+1=1\\x^2-10=507,\end{cases}\quad \begin{cases}3y^2+1=13\\x^2-10=39,\end{cases}\quad \begin{cases}3y^2+1=167\\x^2-10=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2=49\\y^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=7\\y_1=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-7\\y_2=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=7\\y_3=-2,\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=-7\\y_4=-2\end{cases}$$

Ⅱ. 채우기문제

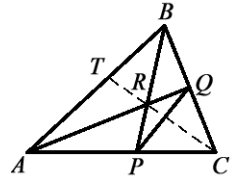
1. 1　　주어진 식$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{2x}{a^2-x^2}\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{ax}{2a+2\sqrt{a^2-x^2}}\right)$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{2x}{a^2-x^2}\cdot\left(x-\frac{ax}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right)$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{x}{a^2-x^2}\cdot\left(x-\frac{a\left(a-\sqrt{a^2-x^2}\right)}{x}\right)$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{x^2-a^2+a\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}$$

$$=\frac{a\sqrt{a^2-x^2}-x^2+a^2-a\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}=1$$

2. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　CR를 맺고 연장하여 ABC와 사귀는 점을 T라고 하면 $\angle PRQ=\angle PRC+\angle CRQ=\angle BRT+\angle ART=\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C+\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)+\angle C$, 네점 P, C, Q, R는 한 원에 놓인다는데로부터 $\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)+2\angle C=180°$, $\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)+\frac{3}{2}\angle C=180°$ 그러면 $\angle C=60°$이다. 따라서 $\angle PRQ=120°$. R는 내심이므로 $PR=QR$이다. ∴ $\triangle PQR$에서 $PR=\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. $x<-1$ 또는 $x>3$　　$x^2-2x+1-p(1-x)>0$. 왼쪽 끝에 P의 1차함수로 표시하면 $f(p)=(x-1)p+(x-1)^2$이다. ∵ $|p|\le 2$. 1차함수가 단조함수이라는데로부터 선분끝점의 세로자리표는 모두 정수라는것을 알수 있다. 따라서

$$\begin{cases} f(-2)=(x-1)(x-3)>0 \\ f(2)=(x-1)(x+1)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \quad 또는 \quad x>3 \\ x<-1 \quad 또는 \quad x>1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x < -1$ 또는 $x > 3$

4. $1:2\sqrt{2}:3$ $\quad (c-a)x^2-2\sqrt{2}bx+c+a=0$, $\because \triangle=\left(-2\sqrt{2}b\right)^2-4(c-a)(c+a)=4b^2>0$이기때문이다. $\therefore$ 이 방정식은 서로 다른 두개의 실수풀이를 가진다. $x_1+x_2=\dfrac{2\sqrt{2}b}{c-a}$, $x_1x_2=\dfrac{c+a}{c-a}$, $x_1^2+x_2^2=12$

즉 $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=12$

$\left(\dfrac{2\sqrt{2}b}{c-a}\right)^2-2\cdot\dfrac{c+a}{c-a}=12$, $b^2=a^2-c^2$을 대입하면

$c^2-4ac+3a^2=0$, $(c-3a)(c-a)=0$, $\because c>a$, $c=3a$, $b=2\sqrt{2}$,

$\therefore \quad a:b:c=1:2\sqrt{2}:3$

Ⅲ. 풀이문제

1. $\angle 1=\angle 2 \Rightarrow OA//CD \Rightarrow \dfrac{AO}{CD}=\dfrac{PO}{PC}\Rightarrow\dfrac{2}{3}\Rightarrow$

$AO=\dfrac{2}{3}\times 18=12\Rightarrow PC=3\times 12=36$

$PB\cdot PC=PA\cdot PD\Rightarrow 12\times 36=2AD\cdot 3AD\Rightarrow$

$AD=6\sqrt{2}\Rightarrow PD=3AD=18\sqrt{2}$. $DE=x, CE=y$라고 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=18^2 & ① \\ \left(18\sqrt{2}+x\right)^2+y^2=36^2 & ② \end{cases}$$

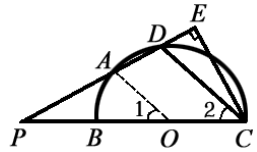
②에서 ①을 덜면 $\left(18\sqrt{2}+x\right)^2-x^2=36^2-18^2\Rightarrow x=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \quad DE=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

2. 문제설정으로부터 $\begin{cases} x^2+y^2=7 \\ x^3+y^3=10 \end{cases}$

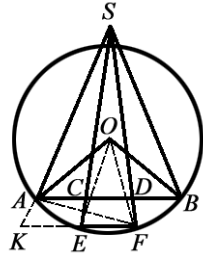
$x=s+t, y=s-t$라고 하면 $x+y=2s$이고

$$\begin{cases} 2s^2+2t^2=7 & ① \\ 2s^3+6st^2=10 & ② \end{cases}$$

①로부터 $2t^2=7-2s^2$, 이것을 ②에 대입하면

$2s^3+3s(7-2s^2)=10$ 즉 $4s^3-21s+10=0$

$(s-2)\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{5}{2}\right)=0$, ∴ s의 최대값은 2이고 $x+y$의 최대값은 4이다.

3. OE, OF, AE, AF를 맺고 SA를 연장하여 FE의 연장선과의 사귐점을 K라고 하자. $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BF}$이므로 $AB//EF$. $\frac{KE}{AC}=\frac{SE}{SC}=\frac{EF}{CD}$

$AC=CD$이므로 $KE=EF=AE$, $\angle KAF=90°$이다.

$FA\perp SA$이고 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EF}$

∴ $OE\perp FA, OE//SA$. 같은 원리로 $OF//SB$를 증명할수 있다.

∴ $\angle ASB=\angle EOF=\frac{1}{3}\angle AOB$

시 험 39

I. 선택문제

1. (ㄷ) $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}=k$ 라고 하면

$$\begin{cases} a+b-c=kc & ① \\ a-b+c=kb & ② \\ -a+b+c=ka & ③ \end{cases}$$

①+②+③

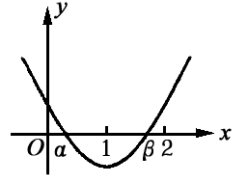
$a+b+c=k(a+b+c)$

∴ $a+b+c=0$ 또는 $k=1$

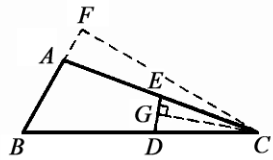
만일 $a+b+c=0$이면 주어진 식 $\frac{(-c)(-a)(-b)}{abc}=-1$

만일 $k=1$이면 $\begin{cases} a+b-c=c \\ a-b+c=b \\ -a+b+c=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2c \\ a+c=2b \\ b+c=2a \end{cases}$

$\therefore \quad \dfrac{(2c)(2b)(2a)}{abc} = 8$

2. (ㄷ) $f(x)=7x^2-(k+13)x+k^2-k-2$ 라고 하자. 도형이 실수풀이를 가진다는데로부터 k의 값범위는 아래의 부등식의 풀이모임이다.

$$\begin{cases} f(0)>0 \\ f(1)<0 \\ f(2)>0 \end{cases} \quad \text{즉} \quad \begin{cases} k^2-k-2>0 \\ k^2-2k-8<0 \\ k^2-3k>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k<-1 \text{ 또는 } k>2 \\ -2<k<4 \\ k<0 \text{ 또는 } k>3 \end{cases} \Rightarrow -2<k<-1 \text{ 또는 } 3<k<4$$

3. (ㄴ) 점 C에서 BA에 수직선을 긋고 BA의 연장선과의 사귐점을 F라고 하자. 그리고 점 C에서 DE에 수직선을 긋고 DE와의 사귐점을 G라고 하면 $\triangle AFC \backsim \triangle EGC$이다. $AC:EC=2:1$이므로 $S_{\triangle AFC}:S_{\triangle EGC}=4:1$ 또 $\triangle CED$는 2등변3각형이므로 $S_{\triangle AFC}:S_{\triangle CDE}=2:1$,

$\therefore \quad S_{\triangle ABC}+2S_{\triangle CDE}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle AFC}=S_{\triangle BFC}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

4. (ㄷ) $a+2\sqrt{a}\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt{a}+6\sqrt[3]{b^2}$

$\Rightarrow a+\sqrt{a}\sqrt[3]{b}-6\sqrt[3]{b^2}=0$

$\Rightarrow \left(\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt{a}-2\sqrt[3]{b}\right)=0$

$\Rightarrow \sqrt{a}=2\sqrt[3]{b} \Rightarrow a^3=64b^2$

$\Rightarrow a^3b=64b^3,\ a^4=64ab^2$

분자는 $2(a^4-64ab^2)+(a^3b-64b^3)+b^4=b^4$

분모는 $(a^4-64ab^2)+2(a^3b-64b^3)+2b^4=2b^4$

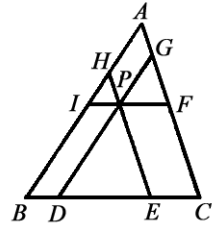
$\therefore$ 주어진 식은 $\dfrac{b^4}{2b^4}=\dfrac{1}{2}$

5. (ㄴ) 그림에서 $S_{\triangle ABC}=S,\ S_{\triangle HIP}=4,\ S_{\triangle GPF}=9,\ S_{\triangle PDE}=49$

라고 하자. 세개의 작은 3각형과 $\triangle ABC$는 각각 닮음3각형들이라는데로부터

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{S}}=\frac{IP}{BC},\ \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{S}}=\frac{PE}{BC},\ \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{S}}=\frac{DE}{BC}$$ 이다.

$$\therefore\quad \frac{2+3+7}{\sqrt{S}}=\frac{IP+PF+DE}{BC}=\frac{BD+EC+DE}{BC}=1$$

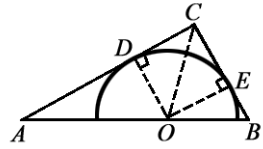
$$\therefore\quad S=144$$

6.(ㄱ) $p>3$일 때 부등식 $\left(p^2+\frac{p}{2}-\frac{1}{2}\right)^2<1+p+p^2+p^3+p^4<\left(p^2+\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\right)^2$이 성립한다는것을 증명할수 있다. 이것은 $p>3$일 때 $1+p+p^2+p^3+p^4$ 두제곱수가 아니라는것이다. 또한 $p=2$일 때 $1+2+2^2+2^3+2^4=31$이므로 이것도 두제곱수가 아니다. $p=3$일 때 $1+3+3^2+3^3+3^4=121=11^2$이다.

Ⅱ. 채우기문제

1. $y=-4x^2+4x+24$ 문제로부터 포물선과 x축과의 사귐점이 $\left(\frac{1}{2}-t,\ 0\right), \left(\frac{1}{2}+t,\ 0\right)$이라고 할수 있다. 그중 $t>0$이면 $\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+\left(\frac{1}{2}+t\right)^2=13\Rightarrow t=\frac{5}{2}$, 따라서 포물선과 x축의 사귐점은 $(-2,\ 0)$과 $(3,\ 0)$이다. 정점은 $\left(\frac{1}{2},\ 25\right)$이라는데로부터 해석식은 $y=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+25$라고 하자. $(3,\ 0)$을 대입하면 $0=a\left(3-\frac{1}{2}\right)^2+25$, $a=-4$

$$\therefore\quad y=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+25$$ 즉 $y=-4x^2+4x+24$

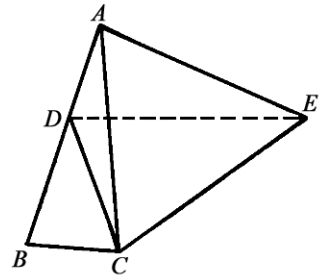
2. $\frac{2S}{\sqrt{c^2+4S}}$ OD, OE, OC를 맺으면 4각형 $CDOE$는 바른

4각형으로 된다. 원 O의 반경을 x라고 하면 $S_{\triangle OAC}+S_{\triangle OBC}=S_{\triangle ABC}$로부터 $\frac{1}{2}bx+\frac{1}{2}ax=S \Rightarrow x=\frac{2S}{a+b}$.

$a^2+b^2=c^2$이라는데로부터 $(a+b)^2=c^2+4S$를 얻을수 있다. 이것을 웃식에 대입하면 $x=\frac{2s}{\sqrt{c^2+4S}}$.

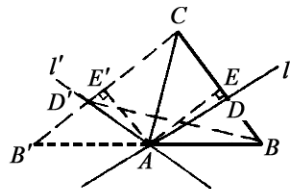
3. $\frac{19}{4}$ $\quad y=\frac{\left(x^2+1\right)^2-\left(x^2-1\right)+5}{\left(x^2+1\right)^2}=1-\frac{1}{x^2+1}+\frac{5}{\left(x^2+1\right)^2}$

$z=\frac{1}{x^2+1}$이라고 하면 $y=5z^2-z+1$

$0<z\leq 1$로부터 $z=\frac{1}{10}$ 즉 $x=\pm 3$일 때 y의 최소값은 $\frac{19}{20}$이다. $z=1$ 즉 $x=0$일 때 y의 최대값은 5이다. 따라서 $\frac{19}{20}\cdot 5=\frac{19}{4}$

4. 30° $\quad \triangle ABC$의 바깥에 AC를 한변으로 하는 바른3각형 $\triangle ACE$를 그리자. DE를 맺고 $\triangle ABC$와 $\triangle EAD$에서 $BC=AD$, $AB=AC=EA$, $\angle ABC=\frac{180^\circ-20^\circ}{2}=80^\circ$. ∴ $\angle ABC=\angle EAD$이고 $\triangle ABC\equiv\triangle EAD$이다. $\angle ADE=80^\circ$, $\angle AED=20^\circ$, $\angle DEC=60^\circ-20^\circ=40^\circ$,

$ED=AC=EC$, ∴ $\triangle EDC$는 2등변3각형이다. ∴ $\angle EDC=\frac{180^\circ-20^\circ}{20}=70^\circ$, 따라서 $\angle BDC=180^\circ-80^\circ-70^\circ=30^\circ$

Ⅲ. 풀이문제

1. 그림에서 B'까지 $AB'=AB$되게 BA를 연장하자. $B'C$를 맺고 정점 A를 지나는 직선 l, l'를 그으면 이것들은 각각 BC 또는 $B'C$와 사귄다.

(1) 만일 l과 BC가 D에서 사귄다면

$\frac{1}{2}(d_1+d_2)\cdot AD=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6^2$ 이다. 이로부터

$d_1+d_2=\frac{18\sqrt{3}}{AD}\le\frac{18\sqrt{3}}{AE}=\frac{18\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=6$ 다만 $l\perp BC$일 때에만 갈기부호를 취할수 있다.

(2) 만일 l'와 $B'C$와 D'에서 사귄다면 $\frac{1}{2}(d_1+d_2)\cdot AD'=$ $S_{\triangle AD'B}+S_{\triangle AD'C}=S_{\triangle AD'B'}+S_{\triangle AD'C}=S_{\triangle AB'C}=S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6^2$ 이다. 이로부터 $d_1+d_2=\frac{18\sqrt{3}}{AD'}\le\frac{18\sqrt{3}}{AE'}=\frac{18\sqrt{3}}{3}=6\sqrt{3}$

$l'\perp B'C'$일 때에만 갈기부호를 취할수 있다.

(1)과 (2)를 종합하면 d_1+d_2의 최대값은 $6\sqrt{3}$이다.

2. $\triangle TCD$에서(문제의 그림) $\angle TCD=\angle TAP+\angle CPA=\angle BTP+\angle CPT=\angle CDT$ 또한 $\angle ATB=\frac{1}{2}\angle AOB=60°$이므로 $\triangle TCD$는 등변3각형이고 $\angle ACD=\angle BDC$이다. PT는 원 O의 접선이므로 $\frac{PT}{PB}=\frac{DT}{DB}=\frac{CD}{DB}$ ∴ $\triangle ACD\backsim\triangle CPB$

3. $n=a+(a+1)+\cdots+(a+k-1)$, $a\in N$이고 $k\ge 2$라고 하자. 그러면 $2n=k(2a-1+k)$(*)

$2a-1>0$이므로 $2a-1+k>k$이고 k와 $2a-1+k$는 서로 다른 홀수, 짝수이다. $n=2^{\alpha_0}\cdot p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_\gamma^{\alpha_\gamma}$($p_i$는 기수인 씨수, $i=1,2,\cdots,\gamma$)라고 하면 $2n=2^{\alpha_0}\cdot p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_\gamma^{\alpha_\gamma}$ 이다. ∴ $2n$은 $(\alpha_0+2)(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_\gamma+1)$개의 정수인 약수이다. 그중 홀수인 약수는 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_\gamma+1)$개 있다.

∴ $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_\gamma+1)=m$

매 홀수인 약수 p는 모두 한개의 짝수인 약수 q에 해당된다고 하자. $p\cdot q=2n$, (*)으로부터 $p\cdot q$중에서 작은

것은 k에 해당되고 큰것은 $2a-1+k$에 해당된다. ∴$k\cdot(2a-1+k)=p\cdot q$, $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_\gamma+1)$가지가 해당된다.

즉 m가지가 해당된다($p=1$, $q=2n$ 포함).

$k=1$일 때 $n=a$이며 이것은 몇개의 련속인 자연수들의 합으로 볼수 없다. ∴ k는 1보다 큰 $m-1$개의 값을 취할수 있다.

시 험 40

I. 선택문제

1. (ㄱ) $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2x-1=\sqrt{5} \Rightarrow x+1=x^2$

따라서 주어진 식 $\dfrac{x^3+x^2}{x^5}=\dfrac{x+1}{x^3}=\dfrac{x^2}{x^3}=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

2. (ㄴ) 방정식은 실수풀이를 가지므로 $\begin{cases} m^2-8n\ge 0 \\ 4n^2-4m\ge 0 \end{cases}$ 이다.

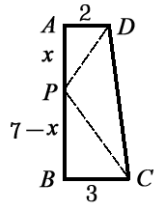
이로부터 $m^4\ge 64n^2\ge 64m$, $m(m^3-64)\ge 0$ 또한 $m>0$이므로 $m^3\ge 64$, $m\ge 4$. m의 최소값은 4이다. 또한 $n^4\ge m^2\ge 8n$, $n\ge 2$ 즉 n의 최소값은 2이다. 그러면 $m+n$의 최소값은 6이다.

3. (ㄷ) $AP=x$라고 하면 $PB=7-x$.

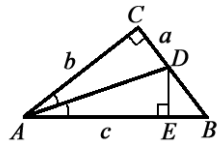
(1) 만일 $\triangle PAD \backsim \triangle PBC$이면 $\dfrac{x}{7-x}=\dfrac{2}{3}$

∴ $x=\dfrac{14}{5}<7$ 조건에 맞는다.

(2) 만일 $\triangle PAD \backsim \triangle CBP$이면 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{2}{7-x}$

∴ $x_1=1, x_2=6$ 이것 역시 조건에 맞는다. 따라서 조건을 만족시키는 점 P는 3개 있다.

4. (ㄷ) $\dfrac{b}{c}=\dfrac{CD}{DB} \Rightarrow \dfrac{b}{b+c}=\dfrac{CD}{a} \Rightarrow CD=\dfrac{ab}{b+c}$,

$\dfrac{AB-AC}{CD}=\dfrac{c-b}{\dfrac{ab}{b+c}}=\dfrac{c^2-b^2}{ab}$

$=\dfrac{a^2}{ab}=\dfrac{a}{b}=\tan A$

다른 방법으로 풀면

$$\frac{AB-AC}{CD}=\frac{AB-AE}{CD}=\frac{EB}{DE}=\tan\ \angle EDB=\tan A$$

5. (ㄴ) $\frac{x}{y}$의미로부터 $y\neq 0$이다. 따라서 $x+y\neq x-y$ 이로부터 $xy=\frac{x}{y}$ 즉 $x(y^2-1)=0$, 그러면 $x=0$ 또는 $y=\pm 1$

① 만일 $x=0$이면 $xy=x+y$ 또는 $xy=x-y$라는데로부터 $y=0$ 따라서 $\frac{x}{y}$는 무의미하다.

② 만일 $y=1$이면 $xy=x+y$라는데로부터 $x=x+1$ 또한 $xy=x-y$라는데로부터 $x=x-1$ 이것은 모두 모순된다.

③ 만일 $y=-1$이면 $xy=x+y$라는데로부터 $x=\frac{1}{2}$, $xy=x-y$라는데로부터 $x=-\frac{1}{2}$ 그러므로 요구에 맞는 수쌍은 다만 $\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$과 $\left(-\frac{1}{2},\ -1\right)$이다.

6. (ㄴ) $a=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}-\frac{1}{8}\sqrt{2}\Rightarrow 8a+\sqrt{2}$

$=\sqrt{16\sqrt{2}+2}\Rightarrow 64a^2+16\sqrt{2}a+2$

$=16\sqrt{2}+2\Rightarrow 4a^2+\sqrt{2}a-\sqrt{2}=0\Rightarrow 2\sqrt{2}a^2+a-1$

$=0\Rightarrow a+1=2-2\sqrt{2}a^2$

$\therefore\quad a^4+a+1=a^4-2\sqrt{2}\,a^2+2=(a^2-\sqrt{2}\,)^2$

$\because\quad a=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}-\frac{1}{8}\sqrt{2}<\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}<\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}$

$\therefore\quad a^2<\sqrt{2}$

주어진 식은 $a^2+\sqrt{2}-a^2=\sqrt{2}$

Ⅱ. 채우기문제

1. 8 두식을 다시 정리하면 $\begin{cases} ma^2-12a+m^2=0 \\ mb^2-12b+m^2=0 \end{cases}$

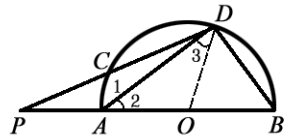
방정식풀이의 정의에 따라 a, b는 반드시 방정식 $mx^2-12x+m^2=0$의 두 실수풀이라는것을 알수 있다. 베타정리로부터 $a+b=\frac{12}{m}$ ……①, $ab=m$ ……②, 또한 $a^2+b^2=10$ 즉 $(a+b)^2-2ab=10$ ……③

①과 ②를 ③에 대입하면 $\left(\frac{12}{m}\right)^2-2m=10 \Rightarrow m^3+5m^2-72=0 \Rightarrow (m-3)(m^2+8m+24)=0 \Rightarrow m=3$이다. 따라서 직4각형의 둘레의 길이는 $2(a+b)=\frac{24}{m}=8$

2.6 주어진 식$=\frac{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^3\right]^2-\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$

$=3\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 여기서 $x>0$이므로 $x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$

∴ $x=1$일 때 $x+\frac{1}{x}$의 최소값은 2이다.

그러므로 $x=1$일 때 주어진 식의 최소값은 6이다.

3. $\frac{12}{7}$ $AO=R$라고 하고 OD, AC를 맺자. $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$이므로 $\angle 1=\angle 2$ 또한 $\angle 2=\angle 3$이므로 $\angle 1=\angle 3$이다. $AC//OD$이므로 $\frac{AO}{CD}=\frac{PA}{PC}=\frac{3}{4}$

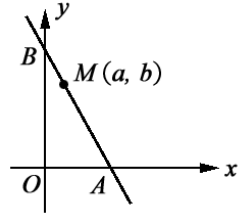
∴ $CD=\frac{4}{3}R$, $BD=\frac{4}{3}R$, $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{(2R)^2-\left(\frac{4}{3}R\right)^2}$

$=\frac{2\sqrt{5}}{3}R$

$S_{\triangle ADB}=16\sqrt{5}$ 라는데로부터 $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{3}R\cdot\frac{4}{3}R=16\sqrt{5}\Rightarrow R=6$

$\because PA\cdot PB=PC\cdot PD$, $PA=x$ 라고 하면 $x(x+12)=\frac{4}{3}x\cdot\left(\frac{4}{3}x+8\right)\Rightarrow x=\frac{12}{7}$ 그러면 $PA=\frac{12}{7}$

4. $y=-\frac{b}{a}x+2b$ 구하려는것을 $y=kx+m(k>0)$ 이라고 하자.

점 M은 그라프우에 있으므로 $b=ka+m$ 즉 $m=b-ak$ 그림에서 보여주는바와 같이 그라프가 x축과 점 A에서, y축과 점 B에서 사귄다고 하면 $A\left(-\frac{m}{k},\ 0\right)$, $B(0, m)$

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\left(-\frac{m}{R}\right)\cdot m=-\frac{m^2}{2R}=-\frac{(b-ak)^2}{2k}$$

$$=-\frac{b^2+a^2k^2-2abk}{2k}=\left(-\frac{b^2}{2k}\right)+\left(-\frac{a^2k}{2}\right)+ab\geq 2\sqrt{\left(\frac{-b^2}{2k}\right)\left(-\frac{a^2k}{2}\right)}+ab$$

$$=ab+ab\geq 2ab$$

다만 $-\frac{b^2}{2k}=-\frac{a^2k}{2}$ 즉 $k=-\frac{b}{a}$ 일 때 $S_{\triangle AOB}$의 최소는 $2ab$이다. 따라서 $k=-\frac{b}{a}$

$$m=b-ak=b-a\left(-\frac{b}{a}\right)=2b$$

따라서 1차함수의 해석식은 $y=-\frac{b}{a}x+2b$

Ⅲ. 풀이문제

1. (1) $m=8$일 때 방정식은 $-8x-10=0\Rightarrow x=-\frac{5}{4}$로 변한다.

(2) $m\neq 8$일 때 우선 문제설정을 거꾸로 한다.

$\triangle<0$ 또는 $\begin{cases}\Delta \ge 0\\ x_1+x_2\ge 0\\ x_1x_2\ge 0\end{cases} \Rightarrow m^2-7m<0$ 또는 $\begin{cases}m^2-7m\ge 0\\ \dfrac{2(m-4)}{m-8}\ge 0\\ -\dfrac{m+2}{m-8}\ge 0\end{cases}$

$\Rightarrow 0<m<7$ 또는 $\begin{cases}m\le 0 \text{ 또는 } m\ge 7\\ m\le 4 \text{ 또는 } m>8\\ -2\le m<8\end{cases} \Rightarrow 0<m<7$ 또는

$-2\le m\le 0 \Rightarrow -2\le m<7$

2. 그림에서 $\angle BAC=2\alpha$라고 하면 $\angle BMC=90^\circ+\alpha$, $\angle BOC=2\angle BPC=2(180^\circ-\angle BMC)=2[180^\circ-(90^\circ+\alpha)]=180^\circ-2\alpha$, $\therefore$ $\angle BAC+\angle BOC=180^\circ$, 네점 A, B, O, C는 한 원안에 있다.

$$\left.\begin{aligned}\angle ABC=\angle AOC=2\angle MPC\\ \angle MPC=\angle MBC\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

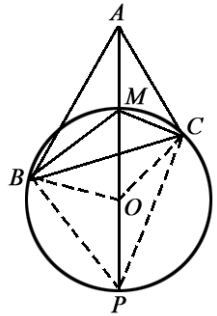
$\angle ABC=2\angle MBC$ 즉 $\dfrac{1}{2}\angle ABC=\angle MBC$.

$\therefore$ BM은 $\angle ABC$를 2등분한다.

같은 원리로부터 CM은 $\angle ACB$를 2등분한다는것을 증명할수 있다.

$\therefore$ 점 M은 $\triangle ABC$의 내심이다.

3. 원 O의 반경을 x라고 하면 원 O_1, 원 O_2, 원 O_3의 반경이 같다는것을 쉽게 할수 있다. 원 O_1, O_2, O_3의 반경을 z라고 하면 $AO_1=2z, AO=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $3z+x=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow z=\dfrac{\sqrt{3}}{9}-\dfrac{x}{3}$

4개 원의 면적의 합을 y라고 하면 $y=\pi x^2+3\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{9}-\dfrac{x}{3}\right)^2=\dfrac{4\pi}{3}\cdot\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{12}\right)^2+\dfrac{\pi}{12}$ 이로부터 x의 값범위는 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}-3\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}\le$

$x \le \frac{\sqrt{3}}{6}$ 즉 $\frac{9-5\sqrt{3}}{12} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{6}$

그러면 $x=\frac{\sqrt{3}}{12}$일 때 $y_{min}=\frac{\pi}{12}$; $x=\frac{\sqrt{3}}{6}$일 때 $y_{max}=\frac{\pi}{9}$이다. 따라서 원 O의 반경이 $\frac{\sqrt{3}}{12}$일 때 네개 원의 면적의 합은 최소로 $\frac{\pi}{12}$를 취할수 있다. 원 O의 반경이 $\frac{\sqrt{3}}{6}$일 때에는 $\frac{\pi}{9}$를 취할수 있다.

시 험 41

I. 선택문제

1. (ㄷ) $\begin{cases} |a-b|=1 \\ ab=0 \end{cases} \Rightarrow (1,\ 0), (0, 1)$

$\begin{cases} |a-b|=0 \\ ab=1 \end{cases} \Rightarrow (1,\ 1)$ 로부터 모두 3쌍 있다.

2. (ㄴ) 방정식의 풀이를 x_0이라고 하면 $ax_0^2+bx_0+c=0$. 따라서 $(2ax_0+b)^2=4a^2x_0^2+4abx_0+b^2=4a(ax_0^2+bx_0+c)+b^2-4ac=b^2-4ac$

3. (ㄹ) $x^2-13x+1=0$으로부터 $x\ne 0$이라는것을 알수 있다. $x+x^{-1}=13$, $x^2+x^{-2}=13^2-2=167$. $x^4+x^{-4}=167^2-2$ 따라서 x^4+x^{-4}의 1의 자리수는 $9-2=7$이다.

4. (ㄴ) 점 A의 자리표를 (x_1, y_1), 점 C의 자리표를 (x_1, y_2)이라고 하면 $x_1y_1=x_2y_2=k$

$\therefore S_1=\frac{1}{2}OB \cdot AB=\frac{1}{2}x_1y_1=\frac{1}{2}x_2y_2=\frac{1}{2}OD \cdot CD=S_2$

5. (ㄴ) $CD=1$ 이라고 하면 $FA=AB=2$. $BC=\frac{1}{2}AB=1$, $\angle ACB=90^\circ$, $FE=FB=AC=\sqrt{3}$

$\triangle ABF \backsim \triangle FBE$ 이므로 $\frac{AB}{BF}=\frac{BF}{BE}$, $\therefore\ BE=\frac{BF^2}{AB}=\frac{3}{2}$.

그러므로 $AE=\frac{1}{2}$, $AE:EB=1:3$

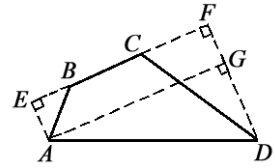
6.(ㄴ)   (1) 먼저 $x_1+x_2+\cdots+x_5\le 110$을 증명하자.
$x_1+x_2+\cdots+x_5\le 110$이면 $x_5\ge 25$ 따라서 $x_6\ge 26$, $x_7\ge 27$, $x_8\ge 28$, $x_9\ge 29$이다. 그러면 $x_1+x_2+\cdots+x_9>220$. 가정과 모순된다.

(2) 만일 $x_1=20$, $x_2=21$, $x_3=22$, $x_4=23$, $x_5=24$라고 하면 $x_1+x_2+\cdots+x_5=110$. 그러므로 $x_1+x_2+\cdots+x_5$이 최대값을 취할 때 x_1의 최대값은 20이다.

(3) 만일 $x_6=26$, $x_7=27$, $x_8=28$, $x_9=29$라고 하면 $x_6+x_7+x_8+x_9=110$. 이로부터 x_9-x_1의 최소값은 $29-20=9$이다.

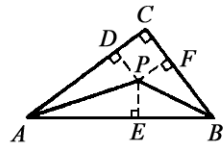
Ⅱ. 채우기문제

1. $2\sqrt{19}$ 그림에서 BC를 두 방향으로 연장하고 A, D를 지나 각각 BC에 수직선을 긋고 그 사귐점을 E, F라고 하자. 그리고 점 A를 지나면서 DF에 그은 수직선의 사귐점을 G라고 한다. 직3각형 AEB에서

$\angle ABE=45^\circ$, $AB=\sqrt{6}$이므로 $AE=EB=\sqrt{3}$이다. 직3각형 CFD에서 $\angle DCF=60^\circ$, $CD=6$이므로 $CF=3$, $DF=3\sqrt{3}$이다. 또한 직3각형 AGD에서 $AG=EF=8$, $DG=DF-GF=2\sqrt{3}$ ∴ $AD=\sqrt{AG^2+DG^2}=2\sqrt{19}$

2. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ $\dfrac{\sqrt{1+x^2+x^4}-\sqrt{1+x^4}}{x}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+x^4}+\sqrt{1+x^4}}$

$$=\frac{x}{|x|\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}+\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{x}{|x|\left[\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\right]}$$

따라서 $x=\dfrac{1}{x}>0$일 때 웃식의 최대값은 $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

3. 3   그림에서 점 p에서 AC, BC에 수직선을 긋고 그 사귐점을 각각 D, F라고 하면 $CD=CF=\dfrac{1}{2}\cdot(AC+BC-AB)=\dfrac{1}{2}\left(5-\sqrt{13}\right)$.

$AD=AC-CD=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{13}+1\right)$

$BF=BC-CF=\frac{1}{2}\left(\sqrt{13}-1\right)$

$\therefore\ AE\cdot EB=AD\cdot BF=3$

4. $2\sqrt{5}$　　$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}=0$ 즉 $\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=1$이고

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\sqrt{\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)^2+4\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=\sqrt{5}$ 이므로

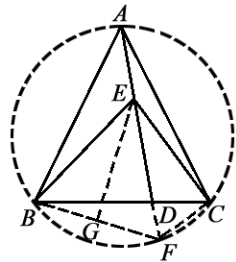
$\left(\frac{b}{a}\right)^3+\left(\frac{a}{b}\right)^3=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^3-3\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)=\left(\sqrt{5}\right)^3-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

Ⅲ. 풀이문제

방정식 $x^2-6x+a=0$이 두개의 정수풀이 x_1, x_2을 가지고 $x_1\le x_2$이라고 하면 $x_1=3-\sqrt{9-a}$, $x_2=3+\sqrt{9-a}$ 이고 $0<a\le 9$

(1) $x_1=x_2$일 때 조건에 맞는 3각형은 오직 한개 있다. 즉 $x_1(=x_2)$을 변으로 하는 등변3각형이다. 이때 $3-\sqrt{9-a}=3+\sqrt{9-a}$ 즉 $\sqrt{9-a}=0$. $\therefore\ a=9$.

(2) $2x_1\le x_2$일 때 조건에 맞는 3각형도 하나 있다. 그것은 x_2이 빗변, x_1가 밑변인 3각형이다. 이때 $6-2\sqrt{9-a}\le 3+\sqrt{9-a}$, $a\le 8$ 따라서 조건에 맞는 3각형이 다만 한개일 때 a의 값범위는 $0\le a\le 8$ 또는 $a=9$

2. AD를 연장하여 $\triangle ABC$의 외접원과의 사귐점을 F라고 하고 CF, BF를 련결하면 $\angle BFA=\angle BCA=\angle ABC=\angle CFA$ 즉 $\angle BFD=\angle CFD$ 그러면 $BD:DC=BF:FC$, $\triangle ABC$와 $\triangle EBF$에서 $\angle BAC=\angle EBF$, $\angle ACB=\angle EFB$이므로 $\angle ABC=\angle EBF=\angle EFB$ 이로부터 $EB=EF$

$\angle BEF$의 2등분선 EG는 G에서 BF와 사귄다. 그러면 $BG=GF$이다. $\angle GEF=\frac{1}{2}\angle BEF=\angle CEF$, $\angle GFE=\angle CFE$. EF는 공통선,

$\therefore\ \triangle EFG\equiv\triangle EFC$, $GF=CF$, 따라서 $BF=2FC$, $BD=2CD$

3. 전화번호 M에 대하여 번호 ㄱ)에 있는 두개 수자는 위치상 M과 갈다는것을 고려하자. 그리고 이 두자리의 위치를 x_1, x_2이라고 하자. 그러면 ㄴ), ㄷ)에서 이 두 수는 위치상 ㄱ)의 두 수와 다르므로 ㄴ), ㄷ)가운데서 이 두 수자는 반드시 위치상 M의 두 수자와 다르다. 그러므로 ㄴ)의것과 M안의 수자가 같은 수의 위치는 반드시 x_3, x_4이고 x_1, x_2이 될수 없다. 같은 원리로부터 ㄷ)의것과 M안의 수자가 같은 수의 위치는 x_1, x_2, x_3, x_4가 아니고 x_5, x_6이다. N에 대해서도 같은 결론을 얻을수 있다. 따라서 매 수위치상 ㄱ), ㄴ), ㄷ)는 각각 그 위치에 해당한 수자들중 M의것과 같은것이 반드시 하나 있다. 마찬가지로 N에도 하나 있다.

이로부터 ㄹ)안의 6, 0 두 수자는 반드시 M과 N의 같은 위치에 있는 수자와 다르다. 그러므로 ㄹ)의 3, 1, 2, 5가운데서 하나의 수자는 M의 같은 위치에 있는 수자와 다르다. N과도 비교적 류사한 결과가 나온다.

(1) 만일 3이 아니면 610253, 013256이다;

(2) 만일 1이 아니면 360251, 301256이다;

(3) 만일 2가 아니면 312056, 310652이다;

(4) 만일 5가 아니면 310265, 315206이다.

검산하면 알수 있다. 즉 전화번호 M, N은 모두 610253 또는 310265이다. 또는 하나는 610253, 다른 하나는 310265이다.

시 험 42

I. 선택문제

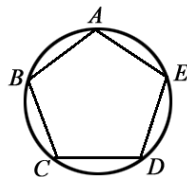
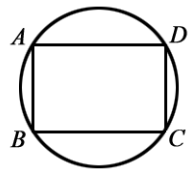
1. (ㄱ) $x^{12}-x^6+1=x^6(x^6-1)+1=x^6(x^2-1)(x^4+x^2+1)+1$ 이므로 나머지는 1이다.

2. (ㄴ) 명제 ①은 정확하다. 증명하자.

그림 ㄱ)에서 $ABCDE$는 원에 내접한 5각형이고 내각들은 같다.

$\angle A=\angle B$로부터 $\overset{\frown}{BCE}=\overset{\frown}{CEA}$, 그러면 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{EA}$ ∴ $BC=EA$. 같은 원리로부터 $BC=DE=AB=CD=EA$임 을

ㄱ)

ㄴ)

증명할수 있다. 따라서 $ABCDE$는 바른5각형이다.

명제 ②는 정확치 않다. 례를 들어보자. 그림 ㄴ)에서 $ABCD$는 원에 내접한 직4각형이므로 $\angle A= \angle B= \angle C= \angle D=90^\circ$, $AB=CD$, $BC=DA$이다. 그러나 $AB \neq BC$이다. 따라서 $ABCD$는 명제 ②의 조건을 만족시킨다. 그러나 바른4각형은 아니다.

3. (ㄹ) $|x-1|, |x+1|$은 각각 수축우의 점 x로부터 점1과 점 -1까지의 거리를 표시한다. 이로부터

$-1 \le x \le 1$일 때 $y=|x-1|+|x+1|=2;$

$x<-1$일 때 $y=|x-1|+|x+1|=2+2|x+1|>2;$

$x>1$일 때 $y=|x-1|+|x+1|=2+2|x-1|>2$

-1과 1사이에는 무한개의 실수 x가 있다. 그러므로 y가 최소값을 가지는 무한개의 x가 있다.

4. (ㄷ) 주어진 련립방정식에서 방정식을 차례로 둘씩 덜어서 배렬하면 $x_1-x_4=a_1-a_2, x_2-x_5=a_2-a_3, x_3-x_1=a_3-a_4, x_4-x_2=a_4-a_5$

$a_1>a_2>a_3>a_4>a_5$이므로 $x_1>x_4$, $x_2>x_5$, $x_3>x_1$, $x_4>x_2$이다. $\therefore x_3>x_1>x_4>x_2>x_5$

5. (ㄱ) $x-1<(x-1)^2<3x+7$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)(x-1)>0\\(x+1)(x-6)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<1 \text{ 또는 } x>2\\-1<x<6\end{cases}$$

$\Leftrightarrow -1<x<1$ 또는 $2<x<6$,

따라서 주어진 부등식의 옹근수풀이는 0, 3, 4, 5이다.

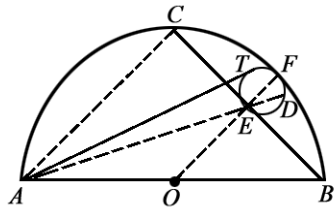
6. (ㄱ) AC를 련결하면 $AC \perp BC$, AE를 맺으면 작은 원과 D에서 사귀고 OF를 련결하면 반드시 E점을 지난다.

DF를 련결하면 직3각형ACE에서,

$$AE=\sqrt{AC^2+CE^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{10}$$

또한 직3각형EDF∽직3각형 ACE를 쉽게 증명할수 있다.

$$\therefore \frac{ED}{AC}=\frac{EF}{AE}$$

$$\therefore ED=\frac{AC(OF-OE)}{AE}=\frac{2\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{10}}$$

$AD=AE+ED$이므로

∴ $AT=\sqrt{AE\cdot AD}=\sqrt{6+4\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$

Ⅱ. 채우기문제

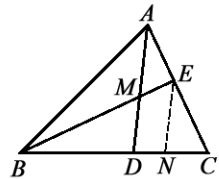
1. 4 $\quad \dfrac{3x^2+6x+5}{\frac{1}{2}x^2+x+1}=\dfrac{6x^2+12x+10}{x^2+2x+2}=6-\dfrac{2}{x^2+2x+2}$

$$=6-\frac{2}{(x+1)^2+1}$$

∴ $x=-1$일 때 분수식은 최소값 4를 취한다.

2. 7 왼쪽으로부터 오른쪽까지의 작은 함안의 구개수를 각각 $7, a_2, a_3, \cdots, a_{1993}$라고 하자. $7+a_2+a_3+a_4=30, a_2+a_3+a_4+a_5=30$이므로 $a_5=7$. 같은 원리로부터 $a_9=a_{13}=a_{17}=\cdots=a_{4k+1}=a_{1993}=7$

3. $\dfrac{4}{7}$ $\quad x^2=y$라고 하면 주어진 방정식은 $y^2-5y+4-k=0$으로 변한다. 이 방정식의 풀이를 $\alpha, \beta(0<\alpha<\beta)$라고 하면 주어진 방정식의 네개풀이는 $\pm\sqrt{\alpha}, \pm\sqrt{\beta}$이다. 이것들은 수축상에서 해당한 네개점에 같은 거리로 배렬된다. ∴ $\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha}$. 그러면 $\beta=9\alpha$. 베타정리 $\alpha+\beta=5$로부터 $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\beta=\dfrac{9}{2}$ 그러면 $4-k=\alpha\beta=\dfrac{9}{4}$ ∴ $k=\dfrac{7}{4}$

4. $\dfrac{4}{15}$ $\quad$ 그림의 E점에서 $EN//AD$ 되게 그리면 BC와 N에서 사귄다. $AE:EC=DN:NC=3:4$, $BD:DC=3:2$이므로 $NC:DN:BD=8:6:21$

$S_{\triangle BEC}=\dfrac{4}{7}S_{\triangle ABC}=\dfrac{4}{7}$, $S_{\triangle BNE}=\dfrac{27}{35}\cdot S_{\triangle BEC}=\dfrac{27}{35}\times\dfrac{4}{7}$. $DM//EN$, $\triangle BDM\backsim\triangle BNE$이므로 $S_{\triangle BDM}=\left(\dfrac{21}{27}\right)^2 S_{\triangle BNE}=\dfrac{49}{81}\times\dfrac{27}{35}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{4}{15}$

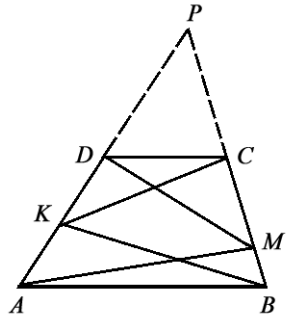
Ⅲ. 풀이문제

1. AD와 BC의 연장선은 P점에서 사귄다.

$\angle PAM = \angle PBK$, $\angle P$는 공통각이므로 $\triangle AMP \backsim \triangle BKP$이다. $\therefore \dfrac{PA}{PB} = \dfrac{PM}{PK}$

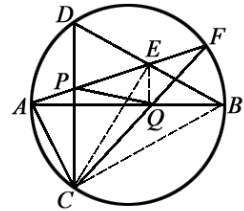
$AB//CD$이므로 $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{PD}{PC}$, $\therefore \dfrac{PM}{PK} = \dfrac{PD}{PC}$이다.

또한 $\angle P$는 공통각이므로 $\triangle PKC \backsim \triangle PMD$이다. $\therefore \angle PCK = \angle PDM$

$\angle CBK = \angle DAK$이므로 $\therefore \angle DMA = \angle CKB$

2. $y_1 = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$, $y_2 = 9x^2 - 18x + 10 = 9(x-1)^2 + 1$이라고 하자. 임의의 실수 x에 대하여 $-x^2 + 2x \le ab + bc + ca \le 9x^2 - 18x + 10$이고 $y_{1\text{최대값}} = y_{2\text{최대값}} = 1$

이로부터 $\begin{cases} ab + bc + ca = 1 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 - c \\ ab = (c-1)^2 \end{cases}$

베타정리의 거꿀정리로부터 a, b는 방정식 $t^2 - (2-c)t + (c-1)^2 = 0$의 두개의 실수풀이라는것을 알수 있다. 그러면 $\triangle \ge 0$ 즉 $[-(2-c)]^2 - 4(c-1)^2 = -c(3c-4) \ge 0 \Rightarrow 0 \le c \le \dfrac{4}{3}$ 같은 원리로부터 $0 \le a \le \dfrac{4}{3}, 0 \le b \le \dfrac{4}{3}$

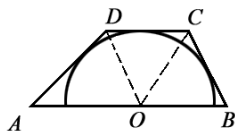
3. 그림에서 EQ와 FB를 맺으면 AB는 직경이고 $AB \perp CD$이므로 $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC}$, $\therefore \angle ABD = \angle AFC$, E, Q, B, F 네점은 한 원주안에 있다. $\therefore \angle EQA = \angle AFB = 90^\circ$, $EQ//CD$. CE, CB, AD를 맺으면 $S_{\triangle EQC} = S_{\triangle EQP}$, $\therefore S_{\triangle CQP} = S_{\triangle PCE}$. $\overset{\frown}{BD} = 2\overset{\frown}{AD}$이므로 $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$, $\therefore \triangle BDC$는 바른3각형이다. 그리고 CE는 $\triangle BDC$의 가운데선이므로 $CE \perp BD$이다. 또한 $AD \perp BD$이므로 $CE//AD$이다. $\therefore S_{\triangle CEA} = S_{\triangle CED} = \dfrac{1}{2} S_{\triangle BDC}$.

$S_{\triangle BDC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(2 \times 1 \times \sin 60^\circ)^2 = \dfrac{3}{4}\sqrt{3}$이므로 $S_{\triangle CQP} = \dfrac{3}{8}\sqrt{3}$

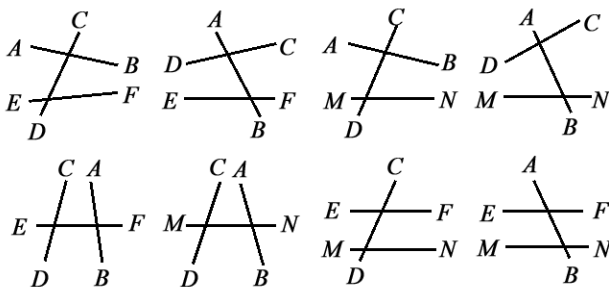
시 험 43

I. 선택문제

1. (ㄱ) 주어진 식은 $\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\cdot\frac{a}{a+1}\cdot\frac{1}{1+a}=\left(\frac{1}{a}-a\right)\cdot\frac{a}{a+1}\cdot\frac{1}{1+a}=\frac{1-a^2}{a}\cdot\frac{a}{a+1}\cdot\frac{1}{1+a}=\frac{1-a}{1+a}$

2. (ㄹ) $2(x+y+z)=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$ 즉 $x+y+z>0$ $\therefore$ x, y, z중 적어도 한개는 0보다 크다.

3. (ㄴ) 그림에서 OC, OD를 맺고 반원 O의 반경을 r라고 하면 $\triangle AOD$에서 변 AO와 DA우의 높이는 모두 r이다. 따라서 $AO=DA$. 같은 원리로부터 $BO=BC$이다. 따라서 $AB=BC+AD=5$

4. (ㄴ) $x=\frac{1+\sqrt{1994}}{2}$이므로 $(2x-1)^2=1994$ 즉 $4x^2-4x-1993=0$. 그러면 $(4x^3-1997x-1994)^{2001}=[(4x^2-4x-1993)x+(4x^2-4x-1993)-1]^{2001}=(-1)^{2001}=-1$

5. (ㄹ) 세개의 선이 사귀여 8개의 각을 이루는 기본도형들에는 같은 내각이 두개 있다. 그러므로 주어진 도형을 8개의 기본도형으로 가를수 있다. 이로부터 모두 16개의 같은 내각이 있다.

6. (ㄷ) 주어진 방정식을 변형시키면 $x^2-x+p=0$, $x\geq 0$. 조건으로부터 판별식 $\triangle=1-4p>0$을 얻을수 있다. 이로부터 $p<\frac{1}{4}$.

주어진 방정식의 두 실수풀이를 x_1, x_2이라고 하면 반드시 $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$이다. $p=x_1x_2 \geq 0$ 따라서 $0 \leq p \leq \frac{1}{4}$. 반대로 만일 $0 \leq p < \frac{1}{4}$이라면 방정식 $x^2-x+p=0$은 반드시 두개의 실수풀이 x_1, x_2을 가지며 $x_1+x_2=1$, $x_1x_2=p \geq 0$이다. $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$이므로 $x_1 \geq x_1x_2=p$와 $x_2 \geq x_1x_2=p$. x_1, x_2은 모두 방정식 $\sqrt{x-p}=x$의 풀이이다.

Ⅱ. 채우기문제

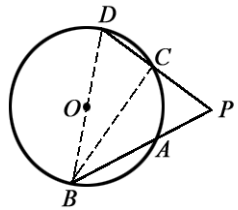
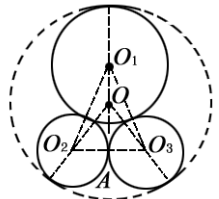
1. -4 $\quad \frac{Mx+N}{x^2+x-2}$은 다 약분된 분수식이므로 분자는 1차식이고 분모는 2차식이다. 또한 $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$이고 $a>b$이므로 $a=2$, $b=-1$을 취한다. 따라서 $c=a+b=1$. 이로부터 $\frac{Mx+N}{x^2+x-2}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-1}$. 웃식에서 $x=0$이라고 하면 $N=-4$이다.

2. 16 $\quad |x+1| \leq 6$으로부터 $-7 \leq x \leq 5$이다. $0 \leq x \leq 5$일 때 $y=x^2-2x+1$ 즉 $y=(x-1)^2$ 이때 $y_{max}=(5-1)^2=16$

$-7 \leq x < 0$ 일 때 $y=-x^2-2x+1$ 즉 $y=2-(x+1)^2$ 이때 $y_{max}=2$

이로부터 $-7 \leq x < 5$일 때 $y_{max}=16$

3. $\sqrt{73}$ $\quad$ 그림에서 $PA \cdot PB=PC \cdot PD$이므로 $8 \cdot 18=PC \cdot (PC+7)$. $PC=9$. BC를 맺으면 $PB=2PC$, $\angle P=60°$이므로 $\angle BCP=90°$,

$\angle BCD=90°$이고 BD를 맺으면 BD는 직경이다. $BD=\sqrt{CD^2+BC^2}=\sqrt{7^2+\left(9\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{73}$ 따라서 원 O의 반경은 $\sqrt{73}$이다.

4. $13\frac{1}{3}$ $\quad$ 그림에서 원 O_1의 반경을 8, 원 O_2과 원 O_3의 반경을 5라고 하고 접점을 A라고 하자. 대칭성으로부터 이 3개 원이 덮는 최소원형종이의 원중심 O는 반드시 대칭축 O_1A우에 있고 3개 원은 서로 내접하고있다는것을 알고있다. 만

일 이 원형종이판의 반경을 r라고 하면

직3각형 O_1O_2A에서 $O_1A=\sqrt{(8+5)^2-5^2}=12$,

직3각형 OO_2A에서 $(r-5)^2=5^2+(12+8-r)^2$

이로부터 $r=\dfrac{40}{3}=13\dfrac{1}{3}$

Ⅲ. 풀이문제

1. $y\ge a \Leftrightarrow x^2+ax+3-a\ge 0$

여기서 $f(x)=x^2+ax+3-a$라고 하면

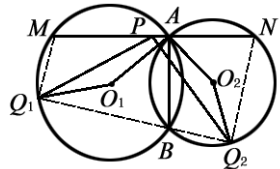
$$\begin{cases} -2\le -\dfrac{a}{2}\le 2 \\ \Delta=a^2-4(3-a)\le 0 \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} -\dfrac{a}{2}>2 \\ f(2)=2^2+2a+3-a\ge 0 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} -\dfrac{a}{2}<-2 \\ f(-2)=(-2)^2-2a+3-a\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\le a\le 2 \\ -6\le a\le 2 \end{cases}$

또는$\begin{cases} a<-4 \\ a\ge -7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a>4 \\ a\le \dfrac{7}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow -4\le a\le 2$ 또는 $-7\le a<-4$ 또는 풀이가 없다. $\Rightarrow -7\le a\le 2$

2. $\angle ABQ_1=\dfrac{1}{2}\cdot\angle AO_1Q_1$, $\angle ABQ_2=180°-\angle ANQ_2=180°-\dfrac{1}{2}\angle AO_2Q_2$ $\because \angle AO_1Q_1=\angle AO_2Q_2$

이므로 $\therefore \angle ABQ_1+\angle ABQ_2=180°$이다. Q_1, B, Q_2은 같은 직선상에 놓인다.

즉 직선 Q_1Q_2은 B점을 지난다. MQ_1, NQ_2를 각각 맺으면 $MN\perp AB$, $\angle MAB=90°$, $\angle NAB=90°$이므로 $\angle MQ_1B=90°$, $\angle NQ_2B=90°$이다. 따라서 4각형 Q_1Q_2NM은 직각제형이다.

직각제형 Q_1Q_2NM의 중간선 BC는 변 Q_1Q_2의 수직2등분선

이다. 따라서 $PQ_1=PQ_2$

3. ① n이 40으로 완제된다는것을 증명하자.

$2n+1$은 완전두제곱수이므로 $2n+1$을 8로 나눈 나머지는 1이다. 따라서 n은 짝수이고 $3n+1$은 홀수이다. 또한 $3n+1$은 완전두제곱수이므로 $3n+1$을 8로 나눈 나머지는 1이다. 따라서 $3n$은 8로 완제된다. $(8, 3)=1$이므로 n은 8로 완제된다.

x^2을 5로 나눈 나머지가 0, 1, 4이고 $(3n+1)+(2n+1)=5n+2$로부터 $3n+1$과 $2n+1$은 5로 나눈 나머지는 1이라는것을 알수 있다. 그러면 $(3n+1)-(2n+1)$은 5로 완제된다. 즉 n은 5로 완제된다.

$(8, 5)=1$이므로 n은 40으로 완제된다.

② 풀이

$2n+1$과 $3n+1$은 모두 완전두제곱수라는데로부터 $2n+1=k^2$, $3n+1=m^2 (k,\ m \in N)$이라고 할수 있다. 그러면 $5n+3=4(2n+1)-(3n+1)=4k^2-m^2=(2k+m)(2k-m)$. $2k+m>1$이다. 만일 $2k-m=1$ 즉 $2k=m+1$이고 $5n+3=2k+m=2m+1$이면 $(m-1)^2=m^2-(2m+1)+2=(3n+1)-(5n+3)+2=-2n<0$. 이것과 $(m-1)^2 \geq 0$은 모순된다. 그러면 $2k-m>1$이다. 따라서 $5n+3$은 합수 즉 $5n+3$은 씨수로 될수 없다.

시 험 44

I. 선택문제

1. (ㄷ) $a=3^{55}=\left(3^5\right)^{11}=243^{11},\ b=4^{44}=\left(4^4\right)^{11}=256^{11}$, $c=5^{33}=\left(5^3\right)^{11}=125^{11}$

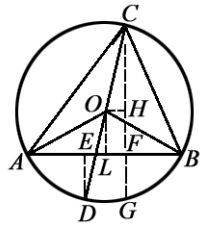
2. (ㄴ) 두번째 방정식은 $(x+y)z=23$이다. $x+y \geq 2$이고 23이 씨수이므로 $z=1$, $x+y=23$ 이로부터 $y=23-x$, 이것을 첫식에 대입하면 $(23-x)(x+1)=63$ 즉 $x^2-22x+40=0$ 이것을 풀면 두 실수풀이 $x_1=2, x_2=20$을 얻을수 있다. 련립방정식의 풀이는 $x_1=2$, $y_1=21, z_1=1; x_2=20, y_2=3, z_2=1$이다.

3. (ㄷ) α, β를 방정식 $x^2-2x+m=0$의 두 풀이라고 하자.

판별식 $\triangle=4-4m\geq0$으로부터 $m\leq1$을 얻는다. $\alpha+\beta=2>1$. 또한 3각형의 두변의 차는 다른변보다 작다는데로부터 $|\alpha-\beta|<1$ 또는 $|\alpha-\beta|^2<1$이라는것을 알수 있다. 베타정리를 리용하여 $|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2-4\alpha\beta=4-4m<1$, 따라서 $m>\frac{3}{4}$이다.

4. (ㄹ) 네변의 길이를 인수분해하면 $BC=39=3\cdot13$, $CD=52=4\cdot13$, $AB=25=5\cdot5$, $DA=60=12\cdot5$이다. 이로부터 $\triangle BAD$와 $\triangle BCD$는 모두 직3각형이라는것을 알수 있다($3^2+4^2=5^2$, $5^2+12^2=13^2$이로부터 $\angle A$, $\angle C$는 직각).

이때 $BD=2R=\sqrt{25^2+60^2}=65$ 따라서 원주의 길이는 65π이다.

5. (ㄴ) 점 D와 C에서 각각 AB에 수직선을 긋고 그 사귐점을 각각 E, F라고 하자. 이와 함께 CF의 연장선과 원 O는 G에서 사귄다고 하자. DG를 맺으면 $\angle DGC=90^\circ$(CD는 직경)로부터 $EFGD$는 직4각형이다. 따라서 $DE=GF$이다. $CF>FG$라고 하고 점 O에서 CG와 AB에 수직선을 그으면 즉 $OH\perp CG$, $OL\perp AB$이면 H는 CG의 가운데점이고 $CF-FG=CH+HF-FG=2HF=2OL$이다. 이로부터 $M=|S_{\Delta CAB}-S_{\Delta DAB}|=\frac{1}{2}AB\cdot CF-\frac{1}{2}AB\cdot DE=\frac{1}{2}AB(CF-FG)=AB\cdot OL=2S_{\triangle OAB}$

6. (ㄴ) $||a|-(a+b)|<|a-|a+b||$에 따라 $||a|-(a+b)|^2<|a-|a+b||^2$을 얻는다. 이것을 간단히 정리하면 $|a|(a+b)>a|a+b|$. 이로부터 $a\neq0$. $a+b>\frac{a}{|a|}|a+b|$, $\frac{a}{|a|}$는 -1로만 취할수 있다. 그러면 $a<0$. 이로부터 $a+b>0$을 쉽게 끌어낼수 있다. $\therefore b>-a>0$

Ⅱ. 채우기문제

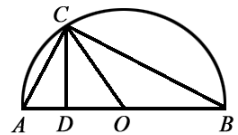
1. 19 $1^2, 2^2, \cdots, 10^2$에서 10의 자리수가 홀수인것은 $4^2=16$, $6^2=36$뿐이라는것을 계산을 통해 알수 있다. 두 자리수의

두제곱수는 $(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$으로 표시할수 있다. 이로부터 b는 4와 6만 취할수 있다. 즉 린접한 10개 수중에서 두개 수의 10의 자리수가 홀수이다. 이로부터 $1^2, 2^2, 3^2\cdots, 95^2$ 중에서 10의 자리수가 홀수인 수는 모두 19개이다.

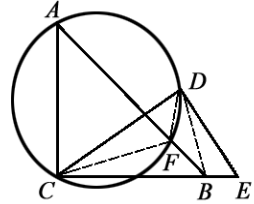
2.20　　인수분해하면 $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$, $a^5+a^4-a^3-a^2=a^2(a-1)(a+1)^2$로 된다. a가 $a^2+a-\frac{1}{4}=0$을 만족시키면 $a\neq 1$이다.

$$\frac{a^3-1}{a^5+a^4-a^3-a^2}=\frac{a^2+a+1}{a^2(a+1)^2}=\frac{\frac{1}{4}+1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=20$$

3. 1　　완전두제곱분리하면 $y=(x-1)^2+x+\frac{1}{x}-1=(x-1)^2+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+1$. $x=1$일 때 $(x-1)^2$과 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$은 모두 최소값 0을 가진다. 이로부터 $y=x^2-x+\frac{1}{x}$의 최소값은 1이다.

4.75° 또는 15°　　점 C에서 AB에 수직선을 긋고 수직점을 D라고 하자. 조건에 따라 $AC\cdot BC=OC^2=\frac{1}{4}AB^2$ 다른 한편 면적공식으로부터 $AC\cdot BC=CD\cdot AB$이다. 이로부터 $CD\cdot AB=\frac{1}{4}AB^2$ 즉 $CD=\frac{1}{4}AB$ 따라서 $CD=\frac{1}{2}OC$. D가 선분 AO우에 있다고 하면 $\angle COD=30°$이다. 왜냐하면 $\triangle COB$는 2등변3각형이고 $\angle COD$는 3각형의 한 내각이기때문이다. 따라서 $\angle CBA=15°$, $\angle CAB=75°$이다. 만일 D가 선분 OB우에 있다면 같은 결론에 기초하여 $\angle CAB=15°$이다. 따라서 답은 $\angle CAB=75°$또는 15°이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. $AC=BC$이고 $\angle ACB$는 직각이므로 $\angle CAB=\angle CBA=45°$이다. 또한 네 점 A, C, F, D는 한 원안에 있으므로 $\angle CDF=\angle CAF=45°$,

$\angle CDE$=90°이다. 그러므로 $\angle EDF = \angle CDE - \angle CDF$=45°= $\angle CDF$, 그러면 DF는 $\angle CDE$의 2등분선이다. 또한 $CB=CD$이므로 $\angle CBD = \angle CDB$ 그리고 $\angle FBD = \angle CBD - 45°$, $\angle FDB = \angle CDB -$ 45°이므로 $\angle FBD = \angle FDB$이다. 따라서 $FB=FD$, $\triangle BCF \equiv \triangle DCF(SAS)$, 이로부터 $\angle BCF = \angle DCF$를 얻는다. 이로부터 CF는 $\angle DCE$의 2등분선이다. 따라서 F는 $\triangle CDE$의 내심이다.

2. $y \le |x|$ 즉 $\frac{x^2 - x + 18}{10} \le |x|$이므로 $x^2 - x + 18 \le 10|x|$ ……①이라고 하면 $x \ge 0$일 때 식 ①은 $x^2 - x + 18 \le 10x$ 즉 $x^2 - 11x + 18 \le 0$. 그러면 $2 \le x \le 9$이다. 이때 조건을 만족시키는 점은 $(2, 2), (4, 3), (7, 6), (9, 9)$이다. $x < 0$일 때 식 ①은 $x^2 - x + 18 \le -10x$ 즉 $x^2 + 9x + 18 \le 0$. 이로부터 $-6 \le x \le -3$ 이때 조건을 만족시키는 점은 $(-6, 6)$, $(-3, 3)$이다. 따라서 조건을 만족시키는 점은 모두 우에서 말한 6점이다.

3. 두 상태로 나누어 설명하자.

(1) 만일 n이 홀수일 때

$n=2k+1$, k는 2보다 큰 옹근수라고 하면 $n=k+(k+1)$이고 $(k, k+1)=1$이므로 이것은 요구에 맞는다.

(2) n이 짝수일 때

$n=4k$ 또는 $4k+2$, k는 1보다 큰 자연수라고 할수 있다. $n=4k$일 때 $n=(2k-1)+(2k+1)$로 쓸수 있고 또한 $2k-1$과 $2k+1$은 씨수라는것을 알수 있다. 왜냐하면 만일 그것들이 공통인수 $d \ge 2$이면 2는 d로 완제된다. 그러나 $2k-1$, $2k+1$은 홀수이다. 이것은 불가능하다. 즉 $n=4k+2$일 때 $n=(2k-1)+(2k+3)$이라고 할수 있고 이로부터 $2k-1$과 $2k+3$은 씨수라는것을 알수 있다. 만일 그것들이 공통인수 $d \ge 2$이면 $2k-1=nd$, $2k+3=md$이고 m, n은 모두 자연수라고 할 때 $(m-n)d=4$이다. 따라서 d14라고 볼수 있는데 모순이다. (1)과 (2)로부터 증명된다.

시 험 45

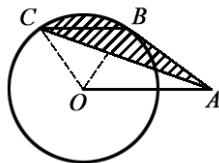
I. 선택문제

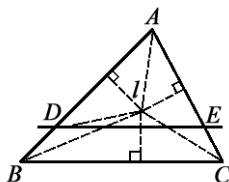
1. (ㄴ) $M=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=\frac{b}{b+ab}+\frac{a}{a+ab}=\frac{b}{b+1}+\frac{a}{a+1}=N$

2. (ㄱ) 주어진 식의 량변을 두제곱하면 $a^2-4\sqrt{2}=m+n-2\sqrt{mn}$. 문제설정으로부터 a, m, n은 자연수이다. 따라서 $a^2-4\sqrt{2}$는 무리수이다. 그러면

$$\begin{cases}\sqrt{mn}=\sqrt{8}\\ m+n=a^2\end{cases} \quad 즉 \quad \begin{cases}mn=8\\ m+n=a^2\end{cases}$$

$m > n$이라는데로부터 $m=8, n=1, a=3$ 이 한조의 값만을 취할수 있다.

3. (ㄴ) OB와 OC를 각각 맺으면 $BC//OA$이므로 $S_{\triangle OBC}=S_{\triangle ABC}$ 따라서 $S_{사선}=S_{부채형OBC}$이다. AB는 원의 접선이므로 $OB\perp AB$. 직3각형 AOB에서 $AO=2$, $OB=1$이다. $\angle AOB=60^\circ \Rightarrow \angle BOC=60^\circ$, 따라서 $S_{사선}=S_{부채형OBC}=\frac{\pi}{6}$

4. (ㄹ) x_1, x_2은 방정식 $x^2+x-3=0$의 두 실수풀이이므로 $x_1^2+x_1-3=0$, $x_2^2+x_2-3=0$ 즉 $x_1^2=3-x_1$, $x_2^2=3-x_2$
풀이와 곁수사이관계로부터 $x_1+x_2=-1$을 알수 있다. 따라서
$x_1^3-4x_2^2+19=x_1(3-x_1)-4(3-x_2)+19=3x_1-x_1^2+4x_2+7=3x_1-(3-x_1)+4x_2+7=4(x_1+x_2)+4=4(-1)+4=0$

5. (ㄱ) $\triangle ABC$의 면적과 둘레의 길이를 2등분하는 직선은 AB, AC와 점 D, E에서 사귀고 I를 $\triangle ABC$의 내심, r를 그안에 내접한 원의 반경이라고 하자. 그러면 $S_{IEAD}=\frac{1}{2}r(AE+AD)$, $S_{BCEID}=\frac{1}{2}r\ (BD+BC+CE)$이다. 직선 ED는 3각형둘레의 길이를 2등분하므로 $AE+AD=BD+BC+CE$이다.

∴ $S_{IEAD}=S_{BCEID}$. $S_{\triangle ADE}=S_{BCED}$를 이미 알고있으므로 $S_{\triangle IDE}=0$ 즉 직선 DE는 I를 지난다.

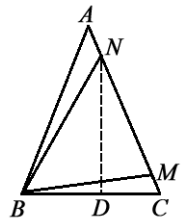
6.(ㄷ) 바른k각형이 조건을 만족시킨다고 하면 k개 정점을 제외한 $20-k$개의 점은 모두 바른k각형의 매 변에 대한 활등우에 균등하게 분포된다. 그러면 $\dfrac{20-k}{k}=\dfrac{20}{k}-1$은 옹근수로 되므로 $k\mid 20$. 그러나 $k\geq 3$이므로 $k=4$ 또는 5 또는 10 또는 20. 따라서 구하려는 바른5각형의 개수는 $\dfrac{20}{4}+\dfrac{20}{5}+\dfrac{20}{10}+\dfrac{20}{20}=12$개이다.

Ⅱ. 채우기문제

1. $\sqrt{5}$ 련립방정식으로부터 $\dfrac{1}{x}=|x|+1$을 얻는다. $x\neq 0$이므로 $\begin{cases}x<0\\x^2-x+1=0\end{cases}$ ① 또는 $\begin{cases}x>0\\x^2+x-1=0\end{cases}$ ②를 얻는다.

방정식 ①은 풀이가 없다. ②의 풀이는 $x_0=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

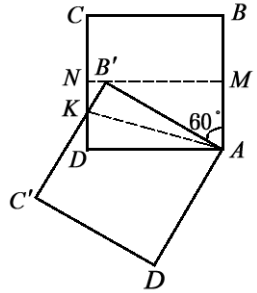
따라서 $y_0=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. ∴ $x_0+y_0=\sqrt{5}$

2. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ 그림에서 $\angle ABN=\angle MBC=\alpha$라고 하자. $BM=NM$이므로 $\angle MBN=\angle BNM$이다. $\angle NBM=\beta$라고 하고 N에서 BC에 수직선을 긋고 그 사귐점을 D라고 하면 $\triangle NBC$에서 $\angle\alpha=180^\circ-2\beta-\alpha$, $\triangle ABC$에서 $\angle C=\angle B=\beta+2\alpha$. ∴ $180^\circ-2\beta-\alpha=\beta+2\alpha$. 이로부터 $\alpha+\beta=60^\circ$이므로 $ND=BN\sin(\alpha+\beta)=a\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

3. 1 $1995x^3=1996y^3=1997z^3=k$라고 하자. $k\neq 0$. 그러면 $1995=\dfrac{k}{x^3}$, $1996=\dfrac{k}{y^3}$, $1997=\dfrac{k}{z^3}$이다.

$\sqrt[3]{\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{k}{z}}=\sqrt[3]{\frac{k}{x^3}}+\sqrt[3]{\frac{k}{y^3}}+\sqrt[3]{\frac{k}{z^3}}>0$ 즉

$\sqrt[3]{k}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\sqrt[3]{k}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$. $k\neq 0$이므로 $\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

$x>0$, $y>0$, $z>0$이므로 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

4. $2-\sqrt{3}$ B'를 지나면서 AD에 평행인 선을 긋고 AB, CD와의 사귐점을 각각 M, N이라고 하자. $B'C'$는 CD와 K 점에서 사귄다고 하면 $B'M=AB'\cdot\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 따라서 $B'N=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $AM=\frac{1}{2}$이다. 직3각형 $AKB'\equiv\triangle AKD$는 쉽게 증명된다. 따라서 $\angle KAB'=\angle KAD=15°$, $AD=AB'$, $\angle ADB'=75°$이다. $\angle NDB'=15°$. 따라서 $\triangle ADK\backsim\triangle DNB'$. 이로부터

$$\frac{DK}{NB'}=\frac{AD}{DN},\quad DK=\frac{AD\cdot B'N}{DN}=\frac{AD\cdot B'N}{AN}=\frac{1\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=2-\sqrt{3}$$ 따라서

겹친부분의 면적은 $S=2S_{\triangle ADK}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)=2-\sqrt{3}$이다.

Ⅲ. 풀이문제

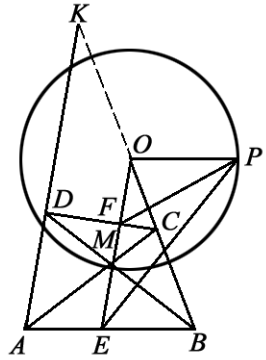
1. $mn+9m+11n+145=(m+11)(n+9)+46$이므로 $mn+9m+11n+45$는 $m+11$로 $mn+9m+11n+145$는 $n+9$로 완제된다는것을 알고있다. 그리고 $m+11=n+9$이다. ∴ 46은 $m+11$과 $n+9$로 완제된다. m, n은 부가 아닌 옹근수이므로 따라서 $m+11\geq 11$, $n+9\geq 9$. 또한 $46=1\times 46=2\times 23$이므로 $m+11=n+9=46$ 또는 $m+11=n+9=23$이다. $m+11=n+9=46$일 때 $mn+9m+11n+145=46\times 46+46=47\times 46$. 이때 매 사람이 푸는 문제수는 $47\times 46\div 46=47$문제이다.

$m+11=n+9=23$일 때 $mn+9m+11n+145=23\times23+46=25\times23$. 이때 매 사람이 푸는 문제수는 $25\times23\div23=25$문제이다.

종합하면 매 사람들은 47 또는 25문제를 푼다.

2. 그림에서 AD와 BC의 연장선의 사귐점은 K이다. $OM//AK$이므로 $\frac{OF}{DK}=\frac{CO}{CK}=\frac{OM}{AK}$이다. 이로부터 $\frac{OM}{OF}=\frac{AK}{DK}$ ……①

$OE//AK$이므로 $\frac{OE}{AK}=\frac{BO}{BK}=\frac{OM}{DK}$. 이로부터 $\frac{OE}{OM}=\frac{AK}{OK}$ ……②

① ②로부터 $\frac{OM}{OF}=\frac{OE}{OM}$를 얻는다. P, M은 원 O우에 있으므로 $OP=OM$, $\frac{OP}{OF}=\frac{OE}{OP}$ 또한 $\angle POF=\angle EOP$이므로 $\triangle POF \backsim \triangle EOP$이다. 따라서 $\angle OPF=\angle OEP$.

3. A, B의 자리표가 각각 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$이고 $x_1 < x_2$이라고 하면 x_1, x_2은 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 풀이이다. 따라서 $x_1+x_2=-\frac{a}{b} < 0$, $x_1x_2=\frac{c}{a} > 0$이다. $x_1 < 0$, $x_2 < 0$. 방정식은 두개의 서로 다른 실수풀이를 가지므로 $\triangle=b^2-4ac > 0, b > 2\sqrt{ac}$ ……①

$|OA|=|x_1|<1, |OB|=|x_2|<1$ 즉 $-1 < x_1 < 0$, $-1 < x_2 < 0$이므로 $\frac{c}{a}=x_1x_2 < 1$이다. 따라서 $c < a$ ……②

이로부터 $a \geq 1$, 포물선은 우로 열리고 $x=-1$일 때 $y > 0$이다. $a(-1)^2+b(-1)+c > 0, b < a+c$이다. 여기서 $b, a+c$는 모두 정의 옹근수이므로 $a+c \geq b+1$ ……③, ①로부터 $a+c > 2\sqrt{ac}+1 \Rightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2 > 1$, ②로부터 $\sqrt{a} > \sqrt{c}+1$ 즉 $a > \left(\sqrt{c}+1\right)^2 \geq \left(\sqrt{1}+1\right)^2=4$ 따라서 $a \geq 5$, 또한 $b > 2\sqrt{ac} \geq 2\sqrt{5\times1} > 4$. $\therefore$ $b \geq 5$.

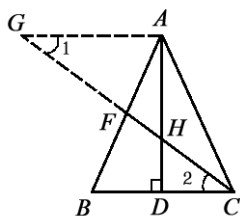
그러므로 $a+b+c$의 최소값은 $5+5+1=11$이다.

시 험 46

I. 선택문제

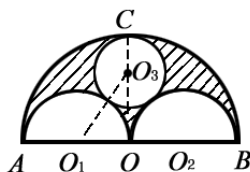
1.(ㄷ) $a \le 0$, $\triangle \ge 0$으로부터 $-a^2-2a-1 \ge 0, (a+1)^2 \le 0$을 얻는다. 그러면 a는 -1뿐이다. $a=-1$을 기본방정식에 대입하면 두 풀이가 같고 $x=1$이다.

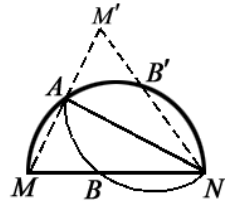
$\therefore\ a^{1996}+x^{1997}=(-1)^{1996}+1^{1997}=2$

2.(ㄴ) 그림에서 CF를 2등변3각형의 변의 가운데선, AD를 정각 $\angle A$의 2등분선이라고 하자. CF를 $FG=CF$ 되게 점 G까지 연장시키고 AG를 맺는다. H가 무게중심이라는데로부터 $HF=\frac{1}{3}CF=2.5$, $AH=\frac{2}{3}AD=6$이다. $\triangle AGF \equiv \triangle BFC$. 이로부터 $AG=BC$, $\angle 1=\angle 2$. $AG // BC$, $AD \perp AG$. 그러므로 $AG=\sqrt{GH^2-AH^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

$\therefore\ S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9=36$

3.(ㄷ) $-\frac{2c}{2(a+b)}=-\frac{1}{2}$ 즉 $c=\frac{a+b}{2}$일 때 $\frac{4(a+b)(b-a)-4c^2}{4(a+b)}$ $=-\frac{a}{2}$. 이것을 정리하면 $2b^2-a^2-2c^2+ab=0$이다. c를 대입하면 $a^2=b^2$

$a>0, b>0$이므로 $a=b=c$

4.(ㄹ) 그림에서 O_1O_3, OO_3을 각각 맺으면 OO_3의 연장선은 접점 C를 지난다. 원 O_3의 반경을 r라고 하면 $O_1O_3=1+r$, $OO_3=2-r$이다. 대칭성으로부터 $CO \perp AB$를 얻는다. $\therefore\ (1+r)^2=1^2+(2-r)^2 \Rightarrow r=\frac{2}{3}$. 따라서 사선친 부분의 면적 $S_{사선}=\frac{1}{2}\pi\cdot 2^2-\pi\cdot 1^2-\pi\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5\pi}{9}$

5. (ㄱ)　　$|x-a|$는 수축상의 두 실수 x, a의 대응점사이거리를 표시한다. 그리고 999부터 1과 1997까지의 거리가 같다면 $x=999$일 때 이 식은 최소값을 가진다.

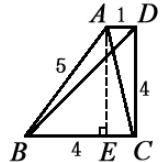
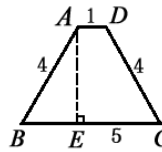
6. (ㄴ)　　그림에서 직선 AN에 관한 MN의 대칭선분 $M'N$을 그리고 반원과의 사귐점을 B'라고 하자. AM과 AM'를 각각 맺으면 세 점 M, A, M'는 한 직선우에 놓인다. $MA=M'A$, $MB=B'M'=4$, $M'N=MN=10$

∴ 그리고 $M'A \cdot M'M=M'B' \cdot M'N$ 즉 $M'A \cdot 2M'A=4 \cdot 10$

∴ $M'A^2=20, MA^2=20$

$AN=\sqrt{MN^2-MA^2}=\sqrt{10^2-20}=4\sqrt{5}$

Ⅱ. 채우기문제

1. $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$　　$(x-\sqrt{2}-1)(x-\sqrt{2}+1)(x^2+mx+n)=x^4+ax^2+b$ 라고 하자. 이것을 전개하고 오른쪽, 왼쪽 두 변의 대응하는 항결수를 비교하여 $m=2\sqrt{2}$, $n=b=1$, $a=-6$을 얻는다. 그러면 방정식 $-6x^2+x+1=0$의 두개 풀이는 $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$이다.

2. $4\sqrt{2}+\sqrt{17}$　　길이가 1인 선분은 제형의 변으로 될수 없고 제형의 두 밑변은 1, 4 또는 1, 5만이 될수 있으며 이런 제형을 그리면 그림 ㄱ), ㄴ)와 같다.

구하려는 제형 ㄱ)의 면적은 $6\sqrt{3}$, 제형 ㄴ)의 면적은 10이다. $6\sqrt{3}>10$이므로 제형 ㄴ)의 면적이 최소로 된다. ㄴ)의 두 대각선은 $BD=4\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{17}$. 두 대각선의 합은 $4\sqrt{2}+\sqrt{17}$이다.

3. $-4<k<0$　　$y=-kx^2-x+k^{-3}$이라고 하자. 만일 임의의 실수 x, y값에 대하여 부호는 변하지 않고 항상 부수라면 즉 $-k^2x^2-x+k^{-3}<0$ 그리고 $-k^2<0$이라면 $x^2+\frac{1}{k^2}x-\frac{1}{k^5}>0$이다. 변형하면

$$\left(x+\frac{1}{2k^2}\right)^2-\frac{k+4}{4k^5}>0$$

웃식이 항상 0보다 크자면 $\frac{k+4}{4k^5}<0$ 즉 k와 $k+4$의 부호가 달라야 한다. 따라서 $-4<k<0$

4. 5　　다각형의 변의 개수를 n(n은 3보다 크거나 같은 자연수), 그 나머지 $n-1$개의 내각의 크기는 모두 k(k는 자연수)라고 하자.

$(n-2)\cdot 180-81=k(n-1)$

$n=1+\frac{261}{180-k}$, ∴ $180-k$는 261이 아닌 261의 약수이다.

그리고 $261=3^2\times 29$, 261이 아닌 약수는 5개 즉 3, 9, 29, 87, 1이다.

∴ n값은 5종 있다. 즉 4, 10, 30, 88, 262

Ⅲ. 풀이문제

1. 그림에서 $A_{n-2}A_n$을 맺고 A_{n-1}을 지나며 $A_{n-2}A_n$에 수직인 선 $A_{n-1}M$을 그리자.

$\overset{\frown}{A_{n-2}A_{n-1}}=\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$이고 이것들의 크기는 모두 $\frac{360^\circ}{n}$이므로

$\angle A_{n-2}A_nA_{n-1}=\frac{180^\circ}{n}$이다.

$A_{n-2}A_{n-1}=A_{n-1}A_n=a$라고 하면

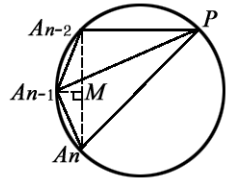
$A_nM=a\cos\frac{180^\circ}{n}$

$A_{n-2}A_n=2a\cos\frac{180^\circ}{n}$

$PA_{n-2}A_{n-1}A_n$은 원에 내접한 4각형이므로 도레미정리로부터 (원에 내접한 4각형에서 두개의 맞은변의 적의 합은 두 대각선의 적과 같다.) 다음의것을 얻을수 있다.

$PA_{n-2}\cdot A_{n-1}A_n+PA_n\cdot A_{n-2}A_{n-1}=PA_{n-1}\cdot A_{n-2}A_n$ 즉

$a(PA_{n-2}+PA_n)=PA_{n-1}\cdot 2a\cos\frac{180^\circ}{n}$

따라서 $\frac{PA_{n-2}+PA_n}{PA_{n-1}}=2\cos\frac{180^\circ}{n}$

2. $x^2-(a+b+c)x+abc$는 a, b, c에 관한 륜환대칭식이므로 a, b를 직각변, C를 경사변(빗변)이라고 하면 $a^2+b^2=c^2$, $a+b+c=\frac{1}{2}ab$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{2}ab-c$, 이것의 두 변을 두제곱하면

$$a^2+2ab+b^2=\frac{1}{4}a^2b^2-abc+c^2,$$

$\therefore\ abc=\frac{1}{4}a^2b^2-2ab$, $\triangle=(a+b+c)^2-4abc=\frac{1}{4}a^2b^2-a^2b^2+8ab=\frac{1}{4}ab(32-3ab)$

세변이 옹근수인 직3각형에서 두 직각변의 적의 최소는 $3\times4=12$ 즉 $ab\geq12$이다.

$\therefore\ 32-3ab<0$, $\triangle<0$이라는 결론이 성립된다.

3. 불가능하다

문제설정에 부합되는 수자채움법이 있다고 가정하자. 그림에서 $a, b, c, \cdots, k, l, \cdots$는 문제에 부합되게 채운 수이다.

$\therefore\ b+e+f+g$와 $j+e+f+g$는 5로 완제된다. 차 $b-j$가 5로 완제되게 하자. 즉 b와 j를 5로 나눈 나머지는 같다. 그 나머지를 r라고 하자.

$j+f+b+g$와 $e+f+b+g$는 5로 완제되므로 $j-e$는 5로 완제된다. 즉 j와 e를 5로 나눈 나머지는 같다. 나머지수는 역시 r이다.

그림에 있는 64개의 작은 칸들을 검은색과 흰색을 엇바꾸면서 채색한다. $b, j, e, g, d, \cdots$ 즉 모서리우의 검은색 두 칸안의 두 수외에 그 나머지 검은색칸의 30개 수를 5로 나눈 나머지는 모두 r이다.

이것은 1부터 64까지의 64개 정의옹근수가운데는 최대로 13개 수가 있는데 5로 나눈 나머지가 모두 같다는것은 모순된다.

$\therefore$ 문제에 설정된 채움법은 불가능하다.

시 험 47

I. 선택문제

1. (ㄱ) $x \geq y$이고 $y \geq z$, $z \geq x$이므로 $x \geq y \geq z \geq x$이다. 따라서 $x=y=z$여야 하며 그것들은 임의의 실수일수 있다.

2. (ㄴ) $a+b+c=0$일 때 $a+b=-c, k=-1$, 직선은 $y=2x+2$이고 이것은 1, 2, 3사분구를 지난다. 따라서 이 그라프는 반드시 2, 3사분구를 지난다.

3. (ㄱ) $x=\frac{5+\sqrt{13}}{2}, y=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$이라고 하면 $x+y=5, xy=3$이다. 그러나 x, y는 모두 홀수가 아니다. 그러므로 ①은 틀린다. $x=5+\sqrt{3}, y=5-\sqrt{3}$이라고 하면 $x+y=10, xy=22$이다. 그러나 x, y는 모두 짝수가 아니다. 그러므로 ②, ③은 틀린다. $x=1, y=\sqrt{3}$이라고 하면 $x+y=1+\sqrt{3}, xy=\sqrt{3}$이다. 그러나 x, y는 모두 무리수가 아니다. 그러므로 ④는 틀린다.

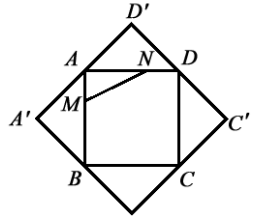
4. (ㄹ) $\triangle ADC$에 대하여 메네라우스정리를 리용하면 $\frac{AP}{PD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$. 그러면 $\frac{AP}{PD}=\frac{6}{1}$이다. $S_{\triangle ABC}=1$이라고 하면 $S_{\triangle BCF}=\frac{2}{3}$, $S_{\triangle BCQ}=\frac{6}{7}S_{\triangle BCE}=\frac{6}{21}$, $S_{BPRF}=\frac{5}{7}S_{\triangle ABD}=\frac{5}{21}$. $\therefore$ $S_{\triangle PQR}=S_{\triangle BCF}-S_{\triangle BCQ}-S_{BPRF}=\frac{1}{7}=\frac{1}{7}S_{\triangle ABC}$.

5. (ㄹ) 그림을 그려보면 알수 있다. $s<s', s>s', s=s'$ 모두 가능하다.

6. (ㄹ) $bc=a^2-8a+7, (b+c)^2=a^2-8a+7+6a-6=(a-1)^2$, $b+c=|a-1|$이므로 b, c는 방정식 $x^2-|a-1|x+a^2-8a+7=0$의 두 실수풀이이다. $\triangle \geq 0$이므로 풀이는 $1 \leq a \leq 9$

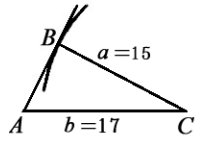
II. 채우기문제

1. $\frac{9}{5}$ 그림에서 $\triangle AD'D \backsim \triangle NAM$을 증명할수 있다. 그러면 $DD':D'A=MA:AN=1:2$이다. $DD'=x$라고 하면 $D'A=2x$, x^2+

$(2x)^2=1^2$ 로부터 $x=\frac{1}{\sqrt{5}}$을 얻는다. $A'A=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $AD'=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 따라서 $S_{A'B'C'D'}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{9}{5}$

2. 62　　$1+2+\cdots+k\leq 1997$ 즉 $k(k+1)\leq 3994$. 그리고 $62\times 63=3960<3994$, $63\times 64=4232>3994$. 따라서 k의 최대값은 62이다.

3. $\frac{a^2}{1-2a}$　　$a\neq 0$이므로 $x\neq 0$이다. 거꿀수를 취하며 $x+\frac{1}{x}=\frac{1}{a}-1$을 얻는다. 그러면 $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1=\left(\frac{1}{a}-1\right)^2-1=\frac{1-2a}{a^2}$

$\therefore\ \frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{a^2}{1-2a}$

4. $\frac{8}{15}$　　$a<b$, $\angle A$는 일정한 값이므로 $\angle A$는 반드시 뾰족각이다. 조건을 만족시키는 $\angle C$는 하나 있다. 각도를 고려하여 그림을 그리면 C는 원중심, a=15인 반경으로 그린 원호와 AB변은 접한다. 즉 $\angle ABC=90^\circ$.

$\tan C=\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{17^2-15^2}}{15}=\frac{8}{15}$ (그림).

Ⅲ. 풀이문제

1. $\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=q$이므로 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\right]=p^3-3pq$, $\alpha^3\beta^3=q^3$이다.

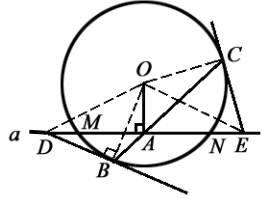
α^3, β^3이 풀이인 방정식은 $x^2-(p^3-3pq)x+q^3=0$이다.

$$\therefore\ \begin{cases} p^3-3pq=p \\ q^3=q \end{cases}$$

p	0, 1, −1	0, 2, −2	0
q	0	1	−1

차례로 7개 방정식을 얻을수 있다. $x^2=0$, $x^2-x=0$, $x^2+x=0$,

$x^2+1=0, x^2-2x+1=0, x^2+2x+1=0, x^2-1=0$. 그중 $x^2+1=0$은 실수풀이가 없으므로 제거한다. 따라서 그 나머지 6개 방정식은 구할수 있다.

2. 그림에서 OB, OC, OD, OE를 각각 맺으면 네 점 O, A, E, C는 한 원안에 있다는것을 증명할수 있다.

$\therefore$ $\angle OEC=\angle OAC$, $\angle OAC=\angle ODB$이므로 $\angle OEC=\angle ODB$

또한 $\angle OBD=\angle OCE=90^\circ, OB=OC$이므로

$\triangle OBD\equiv\triangle OCE$. $\therefore$ $OD=OE$

$AD=AE$이고 $AM=AN$. $\therefore$ $DM=EN$

3. $f(x)=x^2+px+q$라고 하면 $-2\le f(x)\le 2$를 얻을수 있다. $1\le x\le 5$일 때 항상 성립한다.

이 2차함수의 그라프는 우로 열리고 대칭축은 $x=-\frac{p}{2}$이다.

(1) $-\frac{p}{2}\le 1$일 때 $-2\le f(1)<f(5)\le 2$ 즉

$-2\le 1+p+q < 25+5p+q\le 2$이다. 이로부터 $-p-3\le q$이고 $q\le -5p-23$을 얻을수 있다. $\therefore$ $-p-3\le -5p-23$, $p\le -5$, 이것과 $-\frac{p}{2}\le 1$은 모순된다.

(2) $1<-\frac{p}{2}\le 3$일 때 $-2\le f\left(-\frac{p}{2}\right)<f(5)\le 2$

$\therefore$ $-6\le p<-2$일 때 $-2\le\frac{4q-p^2}{4}<25+5p+q\le 2$. 이로부터 $\frac{1}{4}p^2-2\le -5p-23$을 얻을수 있다.

$\therefore$ $-14\le p\le -6$

이때 p는 다만 $-6, 7$뿐이다.

시 험 48

I. 선택문제

1. (ㄴ) $a+b+2c=0$으로부터 a, b, c는 모두 정수 또는 모두 부수일수 없다.

$\because$ $b=-a-2c$. $\therefore$ $b^2=a^2+4ac+4c^2 \Rightarrow b^2-4ac=a^2+4c^2>0$ $(a\neq 0)$

만일 $c=0$이라면 $a=-b$, 주어진 방정식의 두 풀이는 0, 1

만일 a와 c의 부호가 다르다면 $x_1x_2=\dfrac{c}{a}<0$, 주어진 방정식은 하나의 정수풀이와 하나의 부수풀이를 가진다.

만일 a와 c의 부호가 같다면 $x_1x_2=\dfrac{c}{a}>0$, a와 b의 부호는 다르다. 따라서 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}>0$, 주어진 방정식은 두개의 정수풀이를 가진다. 즉 방정식은 적어도 한개의 정수풀이를 가질수 있다.

2. (ㄴ) 명백히 a, b는 모두 짝수이다.

$(11111+a)(11111-b)=11111^2+11111(a-b)-ab$를 4로 나눈 나머지는 1이고 11111^2을 4로 나눈 나머지는 1, ab를 4로 나눈 나머지는 0이다. 따라서 $11111(a-b)$를 4로 나눈 나머지는 0이다. 즉 $a-b$는 4의 배수이다.

3. (ㄱ) $y=ax^2+bx+c$의 그라프는 y축에 관하여 대칭인 $y=ax^2-bx+c$(즉 $-x$가 x를 대신)의 그라프이다.

그리고 $y=ax^2-bx+c$의 그라프는 x축에 관하여 대칭인 $y=-ax^2+bx-c$(즉 $-y$가 y를 대신)의 그라프이다.

$\therefore$ 구하려는 해석식은 $y=-ax^2+bx-c$이다.

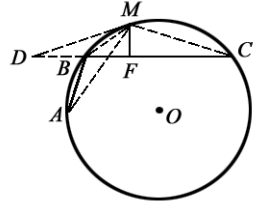
4. (ㄴ) 두 직각변을 $x, y(x>y)$라고 하면 빗변은 $x+1$이다.

$(x+1)^2=x^2+y^2$ 즉 $y^2=2x+1$. 따라서 y는 홀수이다.

y를 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19로 취할 때 대응하는 x는 4, 12, 24, 40, 60, 84, 112, 144, 180이다. 이런 직3각형은 9개 있다.

5. (ㄴ) 내심으로부터 3각형의 세 변까지의 거리는 모두 같다. 3

각형을 두 부분으로 나눈 도형의 면적은 이 거리를 높이로 하는 3각형의 면적의 합으로 표시할수 있다. 이로부터 결론을 얻을수 있다.

6.(ㄱ) 그림에서 $BD=AB$되게 D까지 CB의 연장선을 긋고 MA, MB, MC, MD를 각각 맺는다.

$$\angle ABM=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ACM},\quad \angle DBM=\angle BMC+$$

$$\angle C=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BAC}+\overset{\frown}{BM})=\frac{1}{2}\overset{\frown}{MAC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ACM}=\angle ABM$$

이므로

$\triangle ABM\equiv\triangle DBM$을 얻을수 있다. 그러면 $DM=AM=MC$, $DF=FC$ 즉 $AB+BF=FC$이다.

Ⅱ. 채우기문제

1. $-2\sqrt{1-x^2}$ 문제설정으로부터 $-1\le x\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$를 얻을수 있다. 그러면 $\frac{1}{2}\le x^2\le 1,\ 0\le\sqrt{1-x^2}\le\frac{\sqrt{2}}{2},\ x-\sqrt{1-x^2}\le 0,\ \ x-\sqrt{1-x^2}<0$이다.

따라서 주어진 식은 $\sqrt{\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2}-\sqrt{\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2}$

$=-x-\sqrt{1-x^2}+x-\sqrt{1-x^2}=-2\sqrt{1-x^2}$

2. $104\le n\le 136$ $\triangle ABC$의 세 내각을 $\angle A$, $\angle B$, $\angle A+24^\circ$이고 $\angle A\le\angle B\le\angle A+24^\circ$라고 하자.

$\angle A=\angle B$일 때 $n=\angle A+\angle B$, n은 최소값 104를 가진다. 즉 $n\ge 104$

$\angle B=\angle A+24^\circ$일 때 $n=\angle B+(\angle A+24^\circ)$, n은 최대값 136을 가진다. 즉 $n\le 136$

$\therefore\ 104\le n\le 136$

3. 0 1원2차방정식을 $ax^2-bx+c=0$이라고 하면

$x=\dfrac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$는 이 방정식의 하나의 실수풀이이다.

$ax^2+c=bx$.

∴ 주어진 식은 $ax^4+(2ac-b^2)x^2+c^2=(ax^2+c)^2-b^2x^2=bx^2-bx^2=0$이다.

4.15 $y^2=-2x^2+6x\geq 0$이므로 $0\leq x\leq 3$이다.

$u=x^2+y^2+2x(0\leq x\leq 3)$이라고 하면 $u=-x^2+8x$이다. 따라서 $x=3$일 때 u의 최대값은 15이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. $x=-2$는 주어진 방정식의 풀이가 아니라는것을 검증할수 있다. $x\neq -2$이면 $(x+2)^2>0$

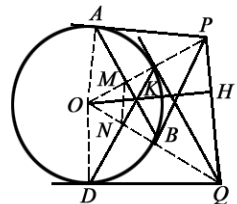
주어진 방정식을 $a(x+2)^2=2x+7$로 변형시키면 $a=\frac{2x+7}{(x+2)^2}$이고 a는 정의 옹근수이다. 그러므로 $\frac{2x+7}{(x+2)^2}\geq 1 \Rightarrow -3\leq x\leq 1$

방정식은 적어도 하나의 옹근수풀이를 가지므로 x가 취할수 있는 값은 -3, $-1, 0, 1$이다.

$x=-3$일 때 $a=1$, $x=-1$일 때 $a=5$이므로 ∴ $a=1$ 또는 5.

2. $x^2-x-6\geq 0$이고 $x^2-x-6\neq 0$일 때 함수 y는 실수범위내에서 의미를 가진다. 풀이는 $x\leq -2$이고 $x\neq -3$ 또는 $x\geq 3$이고 $x\neq 4$이다.

이때 함수 $y=x^2-4x+11$의 그라프를 그리면(자체로 그려볼것) $x\leq -2$이고 $x\neq -3$ 또는 $x\geq 3$이고 $x\neq 4$의 범위내에서 $x=3$일 때 이 함수의 최소값은 $y=8$이다.

3. 그림에서 OP, OQ를 맺고 AB, CD와의 사귐점을 M, N이라고 하자. 그리고 OA, OD, MN을 맺고 OK를 연장하여 PQ와의 사귐점을 H라고 하자.

PA, PB는 원 O와 A, B에서 접하므로 $OA\perp PA$, $OP\perp AB$이고 $OA^2=OM\cdot OP$이다. 같은 원리로부터 $OD^2=ON\cdot OQ$,

$OA=OD$이므로 $OM\cdot OP=ON\cdot OQ$이고 네 점 M, N, Q, P는 하나의 원안에 놓인다. ∴ $\angle OMN=\angle OQP$

$\angle OMB = \angle ONK = 90^\circ$ 이므로 $\angle OMB + \angle ONK = 180^\circ$

O, N, K, M은 하나의 원안에 놓인다. ∴ $\angle OMN = \angle OKN$.

$\angle OKN = \angle OQP$이므로 N, K, H, Q 네 점은 하나의 원안에 놓인다. ∴ $\angle ONK = \angle OHQ = 90^\circ$

따라서 $OH \perp PQ$ 즉 $OK \perp PQ$

시 험 49

I. 선택문제

1.(ㄹ) $(a+b)^2 = 5ab, (a-b)^2 = ab, a+b > 0, a-b > 0$

그러면 $a+b = \sqrt{5ab}, a-b = \sqrt{ab}$. ∴ $\dfrac{a+b}{a-b} = \sqrt{5}$

2.(ㄷ) $\triangle \geq 0$으로부터 $k \geq \dfrac{1}{2}$이고 $x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = 8$. $k_1 = -3, k_2 = 1$이므로 $k = 1$이다.

3.(ㄷ) $\triangle CDF \equiv \triangle CBE$를 증명할수 있다. 그러면 $\triangle CFE$는 2등변직3각형이다. 그 면적이 200이라는데로부터 $CF = 20$을 얻는다. 그러면 $BE = DF = 12$이다.

4.(ㄹ) $x+y+z = \dfrac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$. 그리고 a, b, c는 서로 다른 실수이다. 그러면 $x+y+z > 0$이다. ∴ x, y, z중 적어도 하나는 0보다 크다.

5.(ㄷ) 알고있는것으로부터 $MN // BC$이고 $MN = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}a$를 얻는다. ∴ $\dfrac{FM}{BM} = \dfrac{MD}{BC}$ ……①, $\dfrac{EN}{CE} = \dfrac{DN}{BC}$ ……②이다.

①과 ②를 더하면 $\dfrac{BF - \frac{a}{2}}{BF} + \dfrac{CE - \frac{a}{2}}{CE} = \dfrac{1}{2}$이다.

이로부터 $\dfrac{1}{BF} + \dfrac{1}{CE} = \dfrac{3}{a}$이다.

6.(ㄴ) $a < 0, c < 0, b < 0$이면 abc는 부수이다. $x = 1$일 때 $y = a+b+c$는 부수이다. $x = -1$일 때 $y = a-b+c$는 정수이다. 대칭

축은 $x=-1$, 즉 $-\frac{b}{2a}=-1$, ∴ $b=2a$이다.

$2a-b=0$; $9a-4b=a$는 부수이다. 즉 그중 3개 식의 값은 부수이다.

Ⅱ. 채우기문제

1. $(-1,1),(1,1)$ $2x^4-4yx^2+y^4+1=0$, $x^2=\frac{4y\pm\sqrt{-8(y^2-1)^2}}{4}$ $\in Z$. ∴ $y=\pm1$이고 $y=-1$일 때 $x^2=-1$이므로 실수풀이는 없다. $y=1$일 때 $x^2=1, x=\pm1$

2. 1995 네자리수를 $\overline{abc5}$라고 하면 $\overline{abo}+\overline{ab}\times\overline{c5}=\overline{abc5}$을 즉 $10\overline{ab}+\overline{ab}(10c+5)=100\overline{ab}+10c+5$이다. 정리하면 $(10c-85)\overline{ab}=\overline{c5}$ ∴ $c=9$, $\overline{ab}=19$ ∴ $\overline{abc5}=1995$

3. 1:7 이미 알고있는것으로부터 $\triangle ABD\equiv\triangle EBD$를 증명할 수 있다. ∴ $DE=DA, BE=AB=4, EC=1$. $ED\cdot EA=EC\cdot EB$이므로 $2ED^2=4, ED=\sqrt{2}$이고 $\triangle ABE\backsim\triangle CDE$이다. 따라서

$$\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta CDE}}=\left(\frac{EB}{ED}\right)^2=\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{8}{1}.\quad\therefore\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{1}{7}$$

4. $a=0$ 또는 $a>\frac{25}{4}$ 이미 알고있는것으로부터 $a\geq0$을 알수 있다.

$a=0$일 때 $x^2-5x=0$은 두개의 서로 다른 실수풀이 0, 5를 가진다.

$a>0$일 때 $x^2-5x=\pm a$ 즉 $x^2-5x-a=0$ 또는 $x^2-5x+a=0$ 이다. 앞의것은 $\triangle=25+4a>0$ 따라서 주어진 방정식이 서로 다른 두개의 실수풀이를 가지려면 반드시 뒤의것이 $\triangle=25-4a<0$ 즉 $a>\frac{25}{4}$이여야 한다. ∴ $a=0$ 또는 $a>\frac{25}{4}$

Ⅲ. 풀이문제

1. 만일 $1-m^2=0$ 즉 $m=\pm1$이면 $m=1$일 때 $y=2x-1$과 x축과의 사귐점은 $\left(\frac{1}{2},0\right)$이고 $m=-1$일 때 $y=-2x-1$과 x축과의 사

귐점은 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. 문제의 의미와 맞지 않으므로 제거한다. 따라서 $m=1$이다.

만일 $1-m^2<0$, $\triangle=4>0$이면 포물선과 x축은 두개의 사귐점을 가진다. 문제의미에 따라 $x=0$, 1일 때 y값은 0보다 작고 $0<-\frac{2m}{2(1-m^2)}<1$이다. 이 련립부등식의 풀이모임은 $m>2$이다.

그리고 $1-m^2>0$은 문제의 의미와 맞지 않는다.

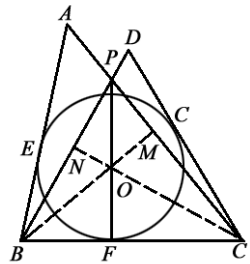
$\therefore$ $m=1$ 또는 $m>2$.

2. 그림에서 원의 중심을 O라고 하자. BO, CO를 각각 맺고 연장하여 AC, BD와 M, N에서 사귄다고 하자.

AB, BC, CD는 원 O와 접하므로 $AB=BC=CD$이다.

따라서 BM, CN은 각각 $\angle ABC$, $\angle BCD$의 2등분선이다.

BM, CN은 AC, BD와 각각 수직이므로 O는 $\triangle PBC$의 수심이다.

$\therefore$ $PO\perp BC$이고 $OF\perp BC$ 즉 $PF\perp BC$

3. 자연수를 $N=a_1a_2\cdots a_n$이라고 하면 $a_1\times10^{n-1}+a_2\times10^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\times10+a_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$

이것을 정리하면

$$a_1(\underbrace{99\cdots9}_{n-1\text{개}}-a_2\times a_3\times\cdots\times a_n)+A=0 \qquad ①$$

이중에서 $A=a_2(10^{n-2}-1)+\cdots+a_{n-1}(10-1)$은 부수가 아니다.

$n\geq3$일 때 $\underbrace{99\cdots9}_{n-1\text{개}}>9^{n-1}\geq a_2\times a_3\times\cdots\times a_n$이면 식 ①은 성립되지 않는다.

$\therefore$ $n\leq2$ 즉 $n=1$ 또는 2

$n=1$일 때의 자연수는 모두 조건을 만족시키지 않는다.

$n=2$일 때 ①로부터 $a_1(9-a_2)=0$,

$a\neq0$이므로 $a_2=9$이다.

따라서 이런 자연수는 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99이고 이것들의 합은 531이다.

시 험 50

I. 선택문제

1. (ㄷ) $a=44$, $b=\sqrt{1991}-44$이므로

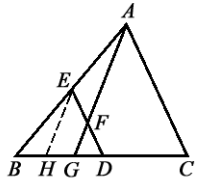
$$\frac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{181}+4\sqrt{11}\right)b}=\frac{\sqrt{44}}{\left(\sqrt{181}+4\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{1991}-44\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{11}\left(\sqrt{181}+4\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{181}-4\sqrt{11}\right)}$$

$$=\frac{2}{181-16\cdot11}=\frac{2}{5}$$

2. (ㄱ) 그림에서 E에서 $EH//AG$ 되게 긋고 그것과 BC와의 사귐점을 H라고 하자.

D, E는 각각 BC, AB의 가운데점이고 F는 DE의 가운데점이므로 $BH=HG$, $HG=GD$,

$\therefore BG:GC=1:2$

따라서 $S_{\triangle ABG}:S_{\triangle ACG}=1:2$

3. (ㄹ) 1차함수의 그라프에 의하여 x,y축이 잘리우는 거리는 각각 정수 $\frac{1}{k}$과 $\frac{1}{k+1}$이다.

$$\therefore S_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2k(k+1)},$$

$$S_1+S_2+\cdots+S_{100}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{100\cdot101}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)=\frac{50}{101}$$

4. (ㄴ) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$가 취할수 있는 값범위는 $\sin\alpha<\cos\alpha<\cot\alpha$이고 $\tan\alpha<\cos\alpha$라는데로부터 α가 뾰족각일 때

$\sin\alpha<\tan\alpha$ 는 늘 성립한다. ∴ $\sin\alpha<\tan\alpha<\cos\alpha<\cot\alpha$.

5. (ㄷ)　　3각형의 세 변을 a, b, c, 그와 대응한 세 변의 높이를 3, 4, 5, 면적을 S라고 하자.

$S=\frac{3}{2}a=2b=\frac{5}{2}c$ 이므로 $a=\frac{2}{3}S$, $b=\frac{1}{2}S$, $c=\frac{2}{5}S$ 이다. $a^2>b^2+c^2$ 이므로 이 3각형은 뾰족3각형이다.

6. (ㄱ)　　$m=-2$일 때 구하려는 방정식의 두 풀이는 0, 2이므로 문제조건에 맞는다.

$m=-3$일 때 두 풀이는 $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$이고 이것들의 옹근수부는 모두 2가 아니므로 (ㄱ)를 취한다.

Ⅱ. 채우기문제

1. 35　　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=x$, $\overset{\frown}{AE}=y$라고 하면 $BE=\overset{\frown}{DA}$이고 $\angle FBD=\angle FDB=75^\circ$이다. 이로부터

$$\begin{cases}4x+y=360^\circ\\ x+y=150^\circ\end{cases}\Rightarrow \overset{\frown}{DE}=x=70^\circ$$

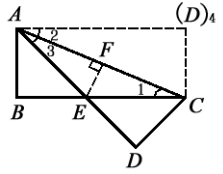
∴ $\angle DBE=35^\circ$.

2. $m\le-\frac{3}{2}$ 또는 $m\ge-1$　　만일 $\triangle_1<0$ 이고 $\triangle_2<0$, $\triangle_3<0$ 이면 이 세 방정식은 모두 실수풀이를 가지지 않는다. 풀이를 얻으면 $\left(-\frac{3}{2}<m<\frac{1}{2}\right)$ 이고 $\left(m<-1 \text{ 또는 } m>\frac{1}{3}\right)$ 이며 $(-2<m<0)$ 이다. 즉 $-\frac{3}{2}m<\frac{1}{2}$ 일 때 $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ 은 모두 0보다 작지 않다. 따라서 $m<-\frac{3}{2}$ 또는 $m>-1$.

3. 17　　x, y, z 는 모두 정수이고 $\sqrt{2}(3y^2z+2y^2-x)+y(y^2+6z^2)=20$ 이므로

∴ $3y^2z+2z^2-x=0$ 이고 $y(y^2+6z^2)=20$, $y^2+6z^2\ge7$, 다만 $y^2+6z^2=10$ 또는 20일수 있다. $y^2+6z^2=20$ 은 정의옹근수풀이가

없다. $y^2+6z^2=10$일 때 $z=1, y=2$이고 $x=14$. ∴ $x+y+z=17$.

4. $42\frac{19}{48}$ 그림에서 직4각형 $ABCD$를 AC를 대칭축으로 하여 접으면 AD와 BC는 E에서 사귀고 E를 지나 AC에 그은 수직선이 AC와 F에서 사귄다고 하자.

$\angle 1=\angle 2=\angle 3$이고 $AE=CE, AF=FC=\frac{13}{2}$.

$\triangle AFE \backsim \triangle ADC$로부터 $EF=\frac{65}{24}$를 구할수 있다. 접은 후 도형의 면적을 S라고 하면

$$S=S_{ABCD}-S_{\triangle AEC}=5\cdot 12-\frac{1}{2}\cdot 13\cdot\frac{65}{24}=42\frac{19}{48}.$$

Ⅲ. 풀이문제

1. $x^2-xy+y^2=M$ ……①, $x^2+xy+y^2=3$ ……②라고 하면

①, ②로부터

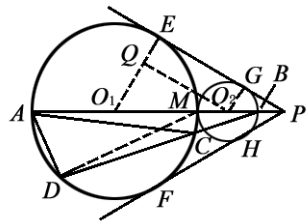
$xy=\frac{3-M}{2}, x+y=\pm\sqrt{\frac{9-M}{2}}$ 이다.

∴ x, y는 방정식 $t^2\mp\sqrt{\frac{9-M}{2}}t+\frac{3-M}{2}=0$의 두개 실수풀이이다.

∴ $\triangle\geq 0$ 이고 $\frac{9-M}{2}\geq 0$ 즉 $\left(\mp\sqrt{\frac{9-M}{2}}\right)^2-4$ 이다. 이로부터 $\frac{3-M}{2}\geq 0$이고 $9-M\geq 0$이다.

풀이는 $1\leq M\leq 9$ 즉 x^2-xy+y^2의 최소값은 1, 최대값은 9이다.

2. 보조선을 그어 그림과 같이 표시(O_1F는 맺지 않음)한다.

문제로부터 $O_1E\perp PE$, $O_1F\perp PF$, $O_1E=O_1F$를 얻는다. ∴ O_1는 $\angle EPF$의 2등분선우에 있다. 같은 원리로부터 O_2은 $\angle EPF$의 2등분선우에 있다.

∴ PA는 $\angle EPF$의 2등분선이다.

$O_2Q // PE$이므로 $\angle QO_2O_1 = \angle EPO_1 = 30^\circ$, $O_1Q = \frac{1}{2}O_1O_2$.

큰원과 작은 원의 반경을 R, r라고 하면 $O_1Q = R - r$, $O_1O_2 = R + r$이다. ∴ $R - r = \frac{1}{2}(R + r)$ 이로부터 $R = 3r$

$\angle ACM = \angle ADM = 90^\circ$이므로

$\cot\angle BAC \cdot \cot\angle BAD = \frac{AC}{CM} \cdot \frac{AD}{DM}$

$\triangle BAC \backsim \triangle BDM$, $\triangle BAD \backsim \triangle BCM$으로부터

$\frac{AC}{DM} = \frac{AB}{DB} \cdot \frac{AD}{CM} = \frac{DB}{MB}$

∴ $\cot\angle BAC \cdot \cot\angle BAD = \frac{AB}{DB} \cdot \frac{DB}{MB} = \frac{AB}{MB} = \frac{8r}{2r} = 4$

3. 문제로부터 $\overline{\underbrace{xx\cdots x}_{n\text{개}}x^2} + \overline{\underbrace{yy\cdots y}_{n\text{개}}} = \overline{\underbrace{zz\cdots z}_{n\text{개}}}$

∴ $\underbrace{11\cdots1}_{n\text{개}}x^2 + y = 1\underbrace{00\cdots0}_{n-1\text{개}}1z$

그리고 x^2은 많아서 두자리수이다. $x^2 = 10a + b$라고 하면

$\underbrace{11\cdots1}_{n\text{개}}0a + \underbrace{11\cdots1}_{n\text{개}}b + y = 1\underbrace{00\cdots0}_{n-1\text{개}}1z$ ①

오른변의 10의 자리수는 0이므로 왼변의 10의 자리수는 0이다.

$b + y \geq 10$일 때 $a + b + 1 = 10$, 아니면 $a + b = 10$.

∴ x^2은 9, 36, 64, 81만이 가능하다. 즉 x는 3, 6, 8, 9만 될수 있다.

$x = 3$일 때 $a = 0, b = 9$이면 식 ①은

$\underbrace{99\cdots9}_{n\text{개}} + y = 1\underbrace{00\cdots0}_{n-1\text{개}}1z$로 변형되므로 $y = 2, z = 1$이다.

$x = 6$일 때 $a = 3, b = 6$이면 식 ①은

$\underbrace{33\cdots3}_{n\text{개}}0 + \underbrace{66\cdots6}_{n\text{개}} + y = z\underbrace{00\cdots0}_{n-1\text{개}}z$로 변형되므로

$y = 8, z = 4$이다.

$x=8$일 때 $a=6, b=4$이면 식 ①은

$\underbrace{66\cdots6}_{n개}0+\underbrace{44\cdots4}_{n개}+y=z\underbrace{00\cdots0}_{n-1개}z$로 변형되므로

$y=3, z=7$(이때 $n=2$일 때만 가능하다.)

$x=9$일 때 식 ①은 풀이가 없다.

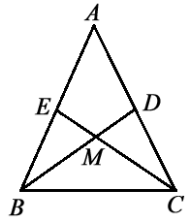
∴ 구하려는 x, y, z의 값은 3, 2, 1 또는 6, 8, 4 또는 8, 3, 7(마지막풀이쌍은 $n=2$일 때만 성립한다.)

시 험 51

I. 선택문제

1. (ㄱ) 이미 알고있는것으로부터 $(x+1)(x^2+1)=0$ 따라서 $x=-1$이다. $y=-1+1-1+1-1+1-1=-1$

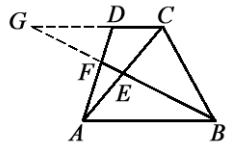
2. (ㄹ) 이미 알고있는것으로부터 $(x-7)(y-7)=49$이고 $49=1\times49=49\times1=7\times7=(-1)\times(-49)=(-49)\times(-1)=(-7)\times(-7)$이다.
앞의 세인수를 취하여 정의옹근수풀이 3조를 얻을수 있다.

3. (ㄹ) (1) : 그림에서 가운데선 BD, CE는 M에서 사귄다. 그러면 $BM=\frac{2}{3}BD=\frac{2}{3}CE=CM$, $MD=\frac{1}{3}BD=\frac{1}{3}CE=ME$, $\angle BME=\angle CMD$, 이로부터 $\triangle BME\equiv\triangle CMD$이고 $BE=CD$이므로 $AB=AC$이다.

(2): 3각형면적으로부터 계산하여 $AB=AC$를 얻을수 있다.

(3): $\cos C=\cos B$이므로 $\angle C=\angle B$, ∴ $AB=AC$

(4): $\tan C=\tan B$이므로 $\angle C=\angle B$, ∴ $AB=AC$

4. (ㄷ) 그림에서 CD와 BF의 연장선은 G에서 사귄다.

$\triangle ABE\equiv\triangle CGE$는 쉽게 증명할수 있다. 그러면 $CG=AB$이고 $DG:AB=2:3$이므로 $AF:FD=AB:DG=\frac{3}{2}$

5. (ㄱ) 두 대각선의 길이를 x, y라고 하면 $\left(\frac{1}{2}x_1\right)^2+\left(\frac{1}{2}x_2\right)^2=5^2$

이것을 정리하면 $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=100$. 이로부터 $m=\frac{13}{2}$ 또는 $-\frac{7}{2}$을 얻을수 있다. 이때 △는 모두 0보다 크다. 그러나 $m=-\frac{7}{2}$일 때 $x_1+x_2=2m-1<0$이고 문제와 어긋나므로 버린다. $x=\frac{13}{2}$일 때 $x_1+x_2>0$이고 $x_1x_2>0$이므로 $m=\frac{13}{2}$

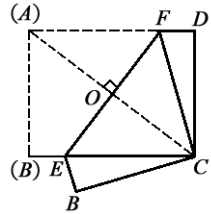
6. (ㄱ) $a+b>c$이므로 $a^2=b(b+c)<b(2b+a)$이다. 이로부터 $(a-2b)(a+b)<0$, ∴ $a<2b$

$\angle c$는 무딘각이므로 $a^2+b^2<c^2$, 즉 $b(b+c)+b^2<c^2$이다. 이로부터 $(2b-c)(b+c)<0$, ∴ $2b<c$,

∴ $a<2b<c$

Ⅱ. 채우기문제

1. 99 이미 알고있는것으로부터 $a+b+c+d+e=478$이고 $a+b+d+e=383$을 얻을수 있다. 이로부터 $c=95$, $c+d=194$, ∴ $d=99$

2. $\frac{15}{2}$ 그림에서 EF는 AC를 수직2등분한다. $OE=OF$, $OC=OA=5$, $\triangle EOC \backsim \triangle ABC$이므로 $\frac{OE}{6}=\frac{5}{8} \Rightarrow OE=\frac{15}{4}$이다. $EF=\frac{15}{2}$

3. $\frac{8}{5}$ 이미 알고있는것으로부터 $5\cdot\frac{1}{b^2}+$

$1999\cdot\frac{1}{b}+8=0$을 얻는다. ∴ a, $\frac{1}{b}$은 방정식 $5x^2+1999x+8=0$의 두 풀이이므로 $a:b=a\cdot\frac{1}{b}=\frac{8}{5}$

4. 72 가름선의 정리로부터 $NQ^2=QA\cdot QB$, $QM\cdot QP=QA\cdot QB$를 얻을수 있다. $QM=x$, $NQ=y$라고 하면 $MP=x+y$, $QP=2x+y$이다. ∴ $y^2=x(2x+y)$, 이로부터 $x=\frac{1}{2}y$를 얻는다. $x=-y$는 버린다. 즉 $NQ=y=2x$, ∴ $PN=6x=6QM=6\cdot 12=72$

Ⅲ. 풀이문제

1. 3개방정식중에서 적어도 하나의 방정식은 실수풀이를 가진다. 3개판별식은 모두 0보다 작지 않다. $m \neq 1$일 때

$$\begin{cases} (4m)^2 - 4(4m^2 + 2m + 3) < 0 \\ (2m+1)^2 - 4m^2 < 0 \\ (2m)^2 - 4(m-1)(m-1) < 0 \end{cases}$$

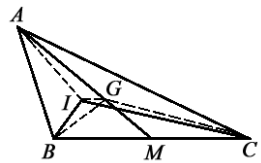
이로부터 풀이는 $\begin{cases} m > -\dfrac{3}{2} \\ m < -\dfrac{1}{4} \\ m < \dfrac{1}{2} \end{cases}$

즉 $-\dfrac{3}{2} < m < -\dfrac{1}{4}$일 때 3개의 판별식은 모두 0보다 작다. ∴ $m \leq -\dfrac{3}{2}$ 또는 $m \geq -\dfrac{1}{4}$일 때 3개판별식은 모두 0보다 작지 않다. 즉 적어도 하나의 판별식은 0보다 작지 않다. ∴ 이 세 방정식중에서 적어도 하나의 방정식은 실수풀이를 가진다.

그리고 $m = 1$일 때 세번째 방정식은 $x = 0$

∴ $m \leq -\dfrac{3}{2}$ 또는 $m \geq -\dfrac{1}{4}$

2. 그림에서 AI, BG, CG를 각각 맺자.

$AG:GM=2:1$이므로 $S_{\triangle GBC}:S_{\triangle ABC} = GM:AM = 1:3$, ∴ $S_{\triangle GBC} = \dfrac{1}{3} S_{\triangle ABC}$이다.

$IG // BC$이므로 $S_{\triangle IBC} = S_{\triangle GBC} = \dfrac{1}{3} S_{\triangle ABC}$

그리고 이미 알고있는것으로부터 I는 $\triangle ABC$의 내심이고 그로부터 세변까지의 거리가 모두 같다는것을 알수 있다. 이 거리를 r라고 하면 $S_{\triangle IAB} + S_{\triangle IAC} = \dfrac{1}{2}(AB + AC)r = 2S_{\triangle IBC} = BC \cdot r$

∴ $AB + AC = 2BC$

3. 이미 알고있는것으로부터 $(a+b)[(a+b)^2 - 3ab]=2$임을 안다.

$a+b=m(m\neq 0)$이라고 하면 $m(m^2-3ab)=2$, $ab=\frac{m^3-2}{3m}$ 그리고 a, b는 모두 실수이다. 이로부터 a, b는 방정식 $x^2-mx+\frac{m^3-2}{3m}=0$의 두 실수풀이이다.

∴ $\triangle\geq 0$, 즉 $m^2-\frac{4(m^3-2)}{3m}\geq 0$

이것을 정리하면 $\frac{m^3-8}{m}\leq 0$이다. ∴ $0<m\leq 2$

∴ $0<a+b\leq 2$, 즉 $a+b$의 최대값은 2이다.

시 험 52

I. 선택문제

1.(ㄱ)　　조건에 따라 두 등식을 덜면 $z=a-10$을 얻는다.

∴ 주어진 식은 $\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2]=\frac{1}{2}(a^2+100+a^2-20a+100)=a^2-10a+100=(a-5)^2+75$

따라서 최대값은 75이다.

2.(ㄷ)　　$AB=AC=10, CE=4$이므로 $BC=4\sqrt{5}$이다.

∴ $BF=\frac{2\sqrt{5}}{\sin 60^\circ}=\frac{4\sqrt{15}}{3}$

3.(ㄱ)　　$p=a+b, q=-ab$이므로

$p+q=a+b-ab=(1-a)(b-1)+1$이다.

$b<1<a$이므로 $1-a<0, b-1<0$

∴ $(1-a)(b-1)>0 \Rightarrow p+q>1$

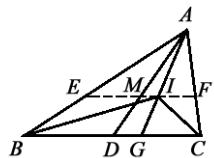
4.(ㄴ)　　$\overline{axb}=9\overline{ab}$이므로 $100a+10x+b=9(10a+b)$ 정리하면 $5(a+x)=4b$이다.

∴ $b=5, a+x=4, a=1,2,3,4$

이런 두 자리수는 4개 있다. 즉 15, 25, 35, 45

5.(ㄷ)　　그림에서 직선 MI를 량쪽으로 연장시켜 AB, AC와의 사귐점을 E, F라고 하자.

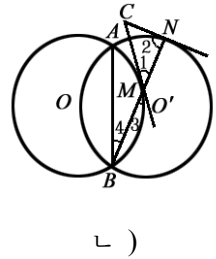
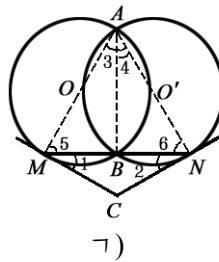
$\angle ABI=\angle CBI=\angle EIB$

∴ $EI=EB$, 같은 원리로부터 $FI=FC$이다.

$\frac{AE}{AB}=\frac{AM}{AD}=\frac{2}{3}$이므로 $EB=EI=\frac{1}{3}AB=\frac{1}{3}C$

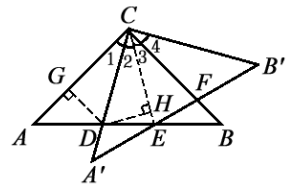
같은 원리로부터 $FC=FI=\frac{1}{3}b$이고 $\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{2}{3}$이다.

$\therefore\ \frac{\frac{1}{3}(n+b)}{a}=\frac{2}{3}\Rightarrow b+c=2a$이다.

6. (ㄹ) 만일 M, N이 점 B의 량쪽에 있다고 하고 AM, AB, AN을 각각 맺자. 그러면 $\overset{\frown}{AOB}=AO'B=120^{\circ}$ 를 얻을수 있다. $\angle 5=\angle 6=60^{\circ}$ 이고 $\angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 4$이므로 $\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4=60^{\circ}$, $\angle MCN=120^{\circ}$ (그림 ㄱ))이다.

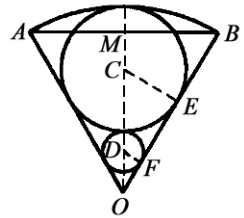
만일 M, N이 B의 한쪽에 있고(그림 ㄴ)) AB를 맺으면 $\angle 1=\angle 3=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BM}$, $\angle 2=\frac{1}{2}\overset{\frown}{NAB}$이다. 이로부터 $\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{NAB})=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{AN}+\overset{\frown}{AOB})$이 고 $\angle 4=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AN}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$, 원 O와 원 O'는 같은 원이므로 $\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{AM}$이다. $\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{AM}+\overset{\frown}{AOB})=120^{\circ}$, $\angle MCN=60^{\circ}$

Ⅱ. 채우기문제

1. $y=x+\frac{a}{x}$, $y^2-5y+6=0$의 두 풀이를 $y_1=2, y_2=3$이라고 하면 $x+\frac{a}{x}=2\Rightarrow x^2-2x+a=0$, $\triangle=0$이라는데로부터 $a=1$을 얻는다. 같은 원리로부터 $a=\frac{9}{4}$

2. $2-\sqrt{3}$ 그림에서 $\triangle ABC$와 $\triangle A'CB'$이 겹친부분은 4각형 $CDEF$이다. 그림에서 보는바와 같이 보조선을 그리자.

회전변환으로부터 $\triangle ACD \equiv \triangle B'CF$, $\triangle CDE \equiv \triangle CFE$이다. 그러면 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 30°$, $AG = DG = DH$, 이로부터 $CG = \sqrt{3}AG$를 얻는다. 그리고 $AG + \sqrt{3}AG = 1 \Rightarrow AG = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $CE = CD = 2AG = \sqrt{3} - 1$로부터 $S_{CDEF} = 2S_{\triangle CDE} = CE \cdot DH = 2 - \sqrt{3}$

3. $\frac{1}{4}a^2$ $\sqrt{x} = \sqrt{a} - \frac{2}{\sqrt{a}} \geq 0, a \geq 2$, $\sqrt{x} = \sqrt{a} - \frac{2}{\sqrt{a}}$의 량변을 두제곱하면 $x + 4 = a + \frac{4}{a}$를 얻고 이것을 다시 두제곱하면 $x^2 + 8x = \left(a - \frac{4}{a}\right)^2$, $a - \frac{4}{a} \geq 0$을 얻을수 있다.

$$\therefore \text{ 주어진 식} = \frac{a + \frac{4}{a} + a - \frac{4}{a}}{a + \frac{4}{a} - a + \frac{4}{a}} = \frac{1}{4}a^2$$

4. 2 그림에서 대칭성의 성질로부터 직선 CD는 점 O에서 두접점을 가지고 AB의 가운데점은 M을 지난다. CE, DF를 각각 맺자.

$OB = R$, $DF = r$라고 하면 $\triangle OCE \backsim \triangle OBM$을 얻을수 있다.

$$\therefore \frac{BM}{CE} = \frac{OB}{OC} \text{ 즉 } \frac{9}{6} = \frac{R}{R-6} \Rightarrow R = 18$$

따라서 $\triangle OAB$는 2등변3각형이고 $\angle BOM = 30°$이다.

$OD = 2r, OD = 18 - 12 - r = 6 - r$이므로

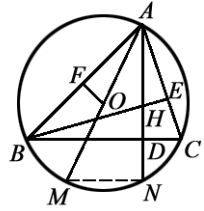
$2r = 6 - r$, $\therefore r = 2$

Ⅲ. 풀이문제

1. 매일 생산된 제품의 질이 최저등급에 비해 x등급 높이고 매일 생산한 제품의 리윤을 y원이라고 하자.

$y = (60 - 3x)(8 + 2x) = -6(x - 8)^2 + 864$

즉 제품의 질이 8등급 높아진다. 9등급제품을 생산할 때 매일 얻는 리윤이 최대(864원)로 된다.

2. 그림에서 뾰족3각형의 외심은 O, 높이 AD, BE는 수심 H에서 사귄다.

O를 지나 AB에 수직선을 긋고 그 사귐점을 F라고 하고 직경 AM을 그리자. 그리고 AD를 연장하여 원 O와의 사귐점을 N, MN을 맺으면 $\angle N = \angle ADB = 90^\circ$

$\therefore$ $BC // MN$, $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CN}$이므로 $\angle BAM = \angle CAN$

그리고 $\angle AFO = \angle AEH = 90^\circ$, $AO = AH$이므로 $\angle AFO \equiv \triangle AEH$, $\therefore$ $AE = AF = \frac{1}{2}AB$, $\angle ABE = 30^\circ$

$\therefore$ $\angle BAC = 60^\circ$

3. $y = x^2 + mx + n$의 그라프와 x축의 두개 사귐점을 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$이라고 하면

$\triangle > 0$, 즉 $m^2 - 4n > 0$이므로

$AB = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{m^2 - 4n}$

$AB \le 2$이므로 $0 < m^2 - 4n \le 4$

가능한 m, n의 수는 $0, 1, 2, \cdots, 9 (m \ne 0)$

$m = 1$일 때 $0 < 1 - 4n \le 4$, 즉 $n = 0$;

$m = 2$일 때 $0 < 4 - 4n \le 4$, 즉 $n = 0$;

$m = 3$일 때 $0 < 9 - 4n \le 4$, 즉 $n = 2$;

$m = 4$일 때 $0 < 16 - 4n \le 4$, 즉 $n = 3$;

$m = 5$일 때 $0 < 25 - 4n \le 4$, 즉 $n = 6$;

$m = 6$일 때 $0 < 36 - 4n \le 4$, 즉 $n = 8$;

그리고 $m = 7, 8, 9$일 때 조건을 만족시키는 n의 풀이는 없다.

$\therefore$ 구하려는 두자리수 mn은 10, 20, 32, 43, 56, 68이다.

시 험 53

I. 선택문제

1. (ㄹ) 이미 알고있는것으로부터 $a^2-3a-1=0$, $(-b)^2-3(-b)-1=0$이고 $a+b>0$이다. 그러면 $a\neq -b$, a, $-b$는 $x^2-3x-1=0$의 두 풀이이므로 $a-b=3, ab=1$을 얻는다. 이로부터

$$\frac{a}{b^3}-\frac{b}{a^3}=\frac{(a-b)\sqrt{(a-b)^2+4ab}[(a-b)^2+2ab]}{(ab)^3}$$

$$=3\cdot\sqrt{13}\cdot 11=33\sqrt{13}$$

2. (ㄴ) 이미 알고있는것으로부터 $\begin{cases}-(k+2)>0\\ k+5>0\\ (k+2)^2-4(k+5)>0\end{cases}$

풀이는 $-5<k<-4$

3. (ㄹ) 이미 알고있는것으로부터 $\frac{AE}{AB}=\cos A,\ \frac{AF}{AC}=\cos A$

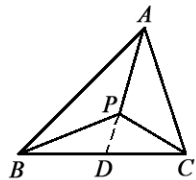
$$\therefore\ \frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AE\cdot AF\sin A}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A}=\cos^2 A$$

4. (ㄷ) 이미 알고있는것으로부터 $x>1997$, $y>1997$을 얻는다.

$x=1997+a, y=1997+b$ (a, b는 자연수)라고 하면

$\frac{1}{1997+a}+\frac{1}{1997+b}=\frac{1}{1997}$이다. 이것을 간단히 정리하면 $ab=1997^2=1\cdot 1997^2=1997\cdot 1997$이다. 이로부터 a, b는 3쌍의 정의 옹근수풀이를 가진다. ∴ 주어진 방정식은 3쌍의 정의 옹근수풀이를 가진다.

5. (ㄹ) 그림에서 AP를 연장하여 BC와의 사귐점을 D라고 하면 $\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta ABD}}=\frac{AP}{AD}=\frac{S_{\Delta APC}}{S_{\Delta ACD}}$이므로

$$\frac{AP}{AD}=\frac{S_{\Delta APB}+S_{\Delta APC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{2}{3}$$

따라서 $AP=\frac{2}{3}AD, PD=\frac{1}{2}PA$. 이로부터 $S_{\triangle BPD}=\frac{1}{2}S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}S_{\triangle BPC}$ 를 얻을수 있다. 따라서 $BD=DC$, 즉 P는 $\triangle ABC$의 무게중심이다.

6. (ㄱ) 이미 알고있는것으로부터 $x^2+2bx+1=2ax+2ab$이다. 즉 $x^2+2(b-a)x+1-2ab=0$이다. 포물선과 직선은 적어도 하나의 사귐점을 가진다. 그러면 $\triangle=4(b-a)^2-4(1-2ab)\leq 0$, 정리하면 $a^2+b^2\leq 1$을 얻을수 있다.

Ⅱ. 채우기문제

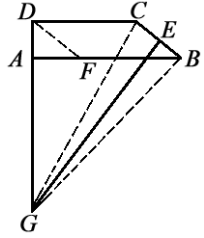
1. 2000 네개의 실수를 a, b, c, d라고 하면 이미 알고있는것으로부터 $abcd=1, a+bcd=1000, b+cda=1000, c+dab=1000, d+abc=1000$이다. 앞의 두 식으로부터 $a(1000-a)=1$, 즉 $a^2-1000a+1=0$을 얻을수 있다. 이로부터 a는 $x^2-1000x+1=0$의 하나의 실수풀이이다. 같은 원리로부터 b, c, d 역시 $x^2-1000x+1=0$의 하나의 실수풀이이다. 이 네개 실수는 완전히 다르다. 또한 륜환대칭성으로부터 a, b, c, d중 두개는 x_1와 같고 두개는 x_2과 같다는것을 알수 있다. 그리고 $x_1+x_2=1000$이므로 $a+b+c+d=2(x_1+x_2)=2000$

2. $\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{abc}$ 이미 알고있는 세개 식의 량변을 곱하면 $xyz=\pm\sqrt{abc}$를 얻는다. 그것을 이미 알고있는 세개 식으로 나누면 $z=\pm\sqrt{\frac{bc}{a}}$, $y=\pm\sqrt{\frac{ac}{b}}$, $x=\pm\sqrt{\frac{ab}{c}}$를 얻을수 있다. ∴ $x^2+y^2+z^2=\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}=\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{abc}$

3. $a>\sqrt{5}-1$ 포물선이 완전히 x축우에 놓이자면 열린 부분이 우로 향하고 정점이 x축의 웃방향에 있어야 한다. 즉 정점의 세로자리표가 정수이여야 한다.

$$y=ax^2+4x+(a+2)=a\left(x+\frac{2}{a}\right)^2+\frac{a^2+2a-4}{a}$$

∴ $a>0, a^2+2a-4>0$이므로 풀이는 $a>\sqrt{5}-1$

4. 35 그림에서 D에서 BC에 평행인 선을 긋고 그것과 AB와의 사귐점을 F라고 하자. GC, GB를 각각 맺으면 $DF=10$, $DA=6$, $GC=GB$를 얻을수 있다. $AG=x$라고 하면 $(x+6)^2+17^2=x^2+25^2$이다. 풀이는 $x=25$, 따라서 $GB=25\sqrt{2}$, $GE=\sqrt{(25\sqrt{2})^2-5^2}=35$

Ⅲ. 풀이문제

1. $CP\cdot PD=AP\cdot PB$이고 $AE=EB=\frac{1}{2}AB$이므로

$$CP\cdot PD=\left(\frac{1}{2}AB+EP\right)\left(\frac{1}{2}AB-EP\right)=\frac{1}{4}AB^2-EP^2$$

$$\therefore\ PD=AB,\ CP=\frac{1}{4}AB-\frac{EP^2}{AB}$$

직3각형 CEP에서 $CE^2=CP^2+EP^2=\left(\frac{1}{4}AB-\frac{EP^2}{AB}\right)^2+EP^2$

$$=\left(\frac{1}{4}AB+\frac{EP^2}{AB}\right)^2,\quad \therefore\ CE=\frac{1}{4}AB+\frac{EP^2}{AB}$$

$$CP+CE=\frac{1}{2}AB=AE=\sqrt{DA^2-DE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

2. 주어진 방정식은 1원2차방정식이므로 $a-b$는 3가지 형태를 가질수 있다. 즉 $a-b=0, a-b=1, a-b=2$

(1) $a-b=0$일 때 즉 $a=b$이면 주어진 방정식은 $x^2+(a-1)x+a^2+a-4=0$으로 변한다.

$\triangle=(a-1)^2-4(a^2+a-4)=-3(a+1)^2+20$

$a+1=0$일 때 $\triangle=20$;

$a+1=\pm1$일 때 $\triangle=17$;

$a+1=\pm2$일 때 $\triangle=8$;

$a+1=\pm3,\ \pm4,\ \cdots$일 때 $\triangle<0$

즉 a가 어떤 옹근수일 때 $\triangle$는 모두 완전두제곱수가 아니므로 방정식이 옹근수풀이를 가지는 옹근수 a, b는 존재하지 않는다.

(2) $a-b=1$일 때 즉 $b=a-1$이면 주어진 방정식은 $x^2+2ax+a^2-3=0$로 변하며 풀이는 $x=-a\pm\sqrt{3}$이므로 옹근수풀이가 존재하지 않는다.

(3) $a-b=2$일 때 즉 $b=a-2$이면 주어진 방정식은 $(a+1)x^2+(a+1)x+a^2-2=0(a\neq-1)$로 변한다.

두 풀이를 x_1, x_2이라고 하면 $x_1x_2=\frac{a^2-2}{a+1}=a-1-\frac{1}{a+1}$

x_1, x_2이 옹근수로 되자면 $a=0$, -2여야 한다. $a=0$, $b=-2$와 $a=-2$, $b=-4$를 방정식에 대입하면 모두 $x^2+x-2=0$이므로 두개의 옹근수풀이는 $-2, 1$이다.

결과 $a=0, b=-2$ 또는 $a=-2, b=-4$

3. $x_1, x_2, \cdots, x_{11}$를 11개의 임의의 옹근수라고 하자. 그중에서 임의의 3개를 취하면 서랍원리로부터 반드시 두개는 홀수 또는 짝수이라는것을 알수 있다. 따라서 이 두수의 합은 2의 배수이다. 이 두수를 x_1, x_2, 즉 $x_1+x_2=2N_1$(N_1는 옹근수)라고 하자.

이로부터 $x_5+x_6=2N_3, x_7+x_8=2N_4, x_9+x_{10}=2N_5$(그중 N_3, N_4, N_5는 옹근수)을 얻을수 있다.

임의의 옹근수를 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1 또는 2이다.

(1) 만일 5개 $N_i(i=1, 2, \cdots, 5)$를 3으로 나눈 나머지는 모두 같다고 하고 앞의 3개 N_1, N_2, N_3을 취하면 $N_1+N_2+N_3=3a$(a는 옹근수)이다. $\therefore x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=2(N_1+N_2+N_3)=6a$

(2) 만일 5개의 N_i를 3으로 나눈 나머지를 $0, 1, 2$중의 두개라고 하면 서랍원리로부터 반드시 3개 N_i를 3으로 나눈 나머지는 같다는것을 알수 있다. 그것을 N_1, N_2, N_3이라고 하자. 같은 원리로부터 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=2(N_1+N_2+N_3)=6b$ (b는 옹근수)

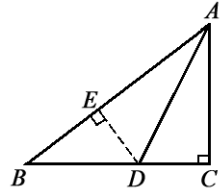
(3) 만일 5개의 N_I를 3으로 나눈 나머지를 0, 1, 2 3가지라고 하고 $N_1=3P_1$, $N_2=3P_2+1$, $N_3=3P_3+2$이라고 하면 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=2\cdot 3P_1+2(3P_2+1)+2(3P_3+2)=6(P_1+P_2+P_3+1)$

종합하면 임의의 8개 옹근수중 항상 6개를 취할수 있는데 그 합은 6으로 완제된다.

임의의 10개수에 대하여 반드시 이런 성질을 가지는것이 아니다. 례를 들어 10개수 즉 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1중 임의의 6개의 합이 모두 6으로 완제될수 없다.

시 험 54

I. 선택문제

1.(ㄴ) 그림에서 D를 지나 AB에 수직선을 긋고 그 사귐점을 E라고 하면 $\triangle ACD \equiv \triangle AED$를 알수 있다. 그러면 $AC=AE$, $CD=DE$

$$\therefore \frac{AB-AC}{CD}=\frac{AB-AE}{CD}=\frac{BE}{DE}=\cot B$$

2.(ㄷ) 문제설정으로부터 $b^2-a^2=ab, ab\neq 0$을 얻을수 있다.

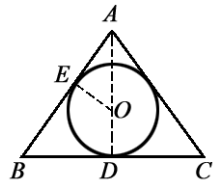
$\therefore \frac{b}{a}-\frac{a}{b}=1$의 두변을 두제곱하고 다시 4를 더하면

$\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2=5$. $\therefore \frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\pm\sqrt{5}$

3.(ㄱ) $\sqrt{21-12\sqrt{3}}=2x+2\sqrt{y}$, $\sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2}=2x+2\sqrt{y}$, $2\sqrt{3}-3=2x+2\sqrt{y}$

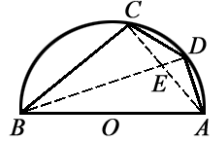
x, y는 유리수이므로 $2x=-3, 2\sqrt{y}=2\sqrt{3}$

$\therefore x=-\frac{3}{2}, y=3$이므로 $x+y=\frac{3}{2}$

4.(ㄹ) 그림에서 OE, AD를 각각 맺는다. 대칭성으로부터 O는 AD우에 있고 $BD=BE=2$, $OE=1$이라는것을 알수 있다.

$\angle AEO=\angle ADB=90^\circ$, $\angle BAD$는 공통각이므로

$\triangle AEO \backsim \triangle ABD$, $\frac{OE}{BD}=\frac{AO}{AB}$, $\therefore \frac{1}{2}=\frac{\sqrt{AE^2+1}}{AE+2}$

이로부터 $AE=\frac{4}{3}, AB=\frac{10}{3}$을 얻는다.

5. (ㄱ) 그림에서 AC, BD를 각각 맺고 D를 지나며 AC에 수직인 선을 긋고 그 사귐점을 E라고 하면 $\angle ADB=\angle ACB=90^{\circ}$, $\angle ABD=\angle CAD$이다. $BD=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$, $\cos\angle CAD=\cos\angle ABD=\frac{\sqrt{15}}{4}$이므로 $AE=AD\cdot\cos\angle CAD=\frac{15}{4}$

$\therefore\ AC=2AE=\frac{\sqrt{15}}{2}$, $BC=\sqrt{4^2-\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}=\frac{7}{2}$

6. (ㄹ) $m^2-8n\geq 0$이고 $4n^2-4m\geq 0$이므로

$n\leq\frac{1}{8}m^2, m\leq n^2$이고 m, n은 모두 정수이다.

$\therefore\ n\leq\frac{1}{8}n^4\ \Rightarrow\ n^3\geq 8\ \Rightarrow\ n\geq 2$

그리고 $m^2\geq 8n$이므로 $m^2\geq 16$이고 $m\geq 4$

$\therefore\ m+n\geq 6$, 즉 $m+n$의 최소값은 6이다.

Ⅱ. 채우기문제

1. $y=x^2-4x+3$ $OA=k$라고 하면 $AB=2k, OC=3k$, 즉 $A(k, 0), B(k, 0), C(0, 3k)$이다.

$\therefore\ k+3k=-p, k\cdot 3k=q, p=-4k, z=3k^2$

또한 $q=3k$이므로 $3k^2=3k(k\neq 0)$, $\therefore\ k=1$

따라서 $p=-4, q=3$이므로 $y=x^2-4x+3$

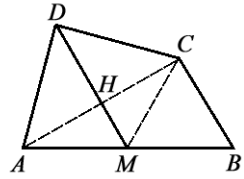
2. 7 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$, $\angle BDC=\angle CAO$, $\angle ACD$는 공통각이므로 $\triangle DCE\backsim\triangle ACD$이다.

$\therefore\ \frac{CE}{CD}=\frac{CD}{AC}, CE\cdot AC=CD^2$

$CE(CE+6)=16$으로부터 $CE=2$

$BE\cdot DE=AE\cdot CE=12$이고 $BE+CE>BC$이므로 $BE>2$, 같은 원리로부터 $DE>2$, 그리고 BE, DE의 길이는 옹근수이므로 $BE=3, DE=4$(또는 $BE=4, DE=3$)

$\therefore\ BD=BE+DE=7$

3. $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ 그림에서 AC, CM을 각각 맺는다. 그러면 $\angle ADC=90^\circ, AC=2$이다.

그리고 $\angle DAC=\angle DCA=45^\circ$이므로 $\angle CAB=30^\circ$, $\angle ACB=90^\circ$이다. $MA=MC$, 또한 $AD=CD$이므로 DM은 AC의 수직2등분선이고 서로 H에서 사귄다. ∴ $DH=\frac{1}{2}AC=1$, $BC=AC\tan 30^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $HM=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $DM=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 1681 $n=100a^2+b=k^2$(a, b, k는 정의 옹근수, $1\le b\le 99$)이라고 하면

$k^2>100a^2, k>10a$이고 ∴ $k\ge 10a+1$

그리고 $b=k^2-100a^2\ge(10a+1)^2-100a^2=20a+1$,

∴ $20a+1\le b\le 99$이고 a의 최대값은 4이다.

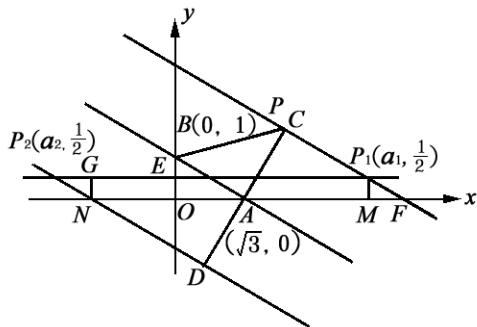
∴ n은 반드시 $\overline{16xy}$의 두제곱수이다. $n=41^2=1681$

Ⅲ. 풀이문제

1. 그림에서 $\triangle ABP$와 $\triangle ABC$의 면적이 같다는데로부터 P점부터 직선 AB까지의 거리는 AC와 같다는것을 알수 있다. 그리고 점 $E\left(0, \frac{1}{2}\right)$를 지나며 x축에 평행인 직선우에 있다. 이런 P점은 그림과 같이 두점 $P_1\left(a_1, \frac{1}{2}\right), P_2\left(a_2, \frac{1}{2}\right)$이 있다.

$A\left(\sqrt{3}, 0\right)$, $B(0, 1)$, $AB=AC=AD=2$이므로

$\angle BAO=\angle CFO=\angle AND=\angle EP_2D=30^\circ$.

G에서 $NG\perp P_1P_2$ 되게 수직선을 긋고 P_1에서 $P_1M\perp x$축 되게 수직선을 그으면

$AF=AN=4, ON=EG=4-\sqrt{3}, OF=4+\sqrt{3}$

$NG=MP_1=\frac{1}{2}$ 이므로 $GP_2=MF=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore EP_1=OM=OF-MF=4+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore a=4+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $EP_2=EG+GP_2=4-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a=-4+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore a=4+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $-4+\frac{\sqrt{3}}{2}$

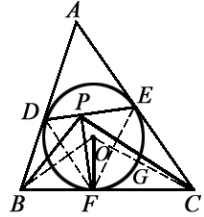
2. OF, OB, OC를 각각 맺고 OC와 $\overset{\frown}{EF}$와의 사귐점을 G, DF, EF를 각각 맺는다(그림).

원 O는 $\triangle ABC$의 내접원이므로

$CE=CF, BD=BF, \overset{\frown}{FG}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{FE}$이다.

$\angle FDE=\angle COF$, 그리고 $\angle DPF=\angle OFC$,

$\therefore \triangle DPF \backsim \triangle OFC$, 같은 원리로부터 $\triangle EPF \backsim \triangle OFB$

$\therefore \frac{PD}{OF}=\frac{PF}{CF}, \frac{PE}{OF}=\frac{PF}{BF}$, $\therefore OF\cdot PF=PD\cdot CF=PD\cdot CE$, $OF\cdot PF=PE\cdot BF=PE\cdot BD$, $\therefore PD\cdot CE=PE\cdot BD$, $\therefore \frac{PD}{PE}=\frac{BD}{CE}$, 그리고 $\angle BDP=\angle CEP$이므로 $\triangle BDP \backsim \triangle CEP$, $\therefore \angle DBP=\angle ECP$

3. 앞의 n개분동 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, …중 앞의 2개, 4개, 6개는 모두 2개조로 나눌수 없다. 매 조의 분동질량은 같고 개수 역시 같다.

그러나 앞의 8개 분동은 될수 없다. 즉

$1^2+4^2+6^2+7^2=2^2+3^2+5^2+8^2=102$

그리고 $2\cdot 1+2\cdot 4+2\cdot 6+2\cdot 7=2\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 5+2\cdot 8=36$

$\therefore$ 아래의 등식은 x의 모든 값에 대하여 항상 성립한다.

$(x+1)^2+(x+4)^2+(x+6)^2+(x+7)^2=(x+2)^2+(x+3)^2+(x+5)^2+(x+8)^2$ 그러므로 이 4개분동을 다음의 방식으로 두조 나눈다.

모든 분동질량의 2차뿌리를 8로 나눈 나머지가 1, 4, 6, 7인것을 한조, 나머지가 2, 3, 5, 0인것을 다른 한조로 나눈다. 그러면 이 두

조의 20개 분동의 질량이 같다.

제1조의 20개 분동은 1^2, 4^2, 6^2, 7^2, 9^2, 12^2, 14^2, 15^2, 17^2, 20^2, 22^2, 23^2, 25^2, 28^2, 30^2, 31^2, 33^2, 36^2, 38^2, 39^2g이다.

제2조 20개 분동은 2^2, 3^2, 5^2, 8^2, 10^2, 11^2, 13^2, 16^2, 18^2, 19^2, 21^2, 24^2,26^2, 27^2, 29^2, 32^2, 34^2, 35^2, 37^2, 40^2 g이다.

시 험 55

I. 선택문제

1. (ㄴ) 이미 알고있는 부등식의 두변을 두제곱하면 $x^2+2xy+y^2<x^2-2xy+y^2$, 즉 $xy<0$을 얻는다. 그러면 점 $M(x, y)$는 2,4사분구에 있다.

2. (ㄷ) a의 뒤의 두개수를 m, n이라고 하면 $(10m+n)^2=100m^2+20mn+n^2$이다. 그리고 a^2의 10의 자리수가 바로 a의 10의 자리수를 확정한다. n은 정확히 홀수가 아니다(홀수를 두제곱한 10의 자리수는 반드시 짝수이다). 만일 n이 2, 8이면 n^2의 10의 자리수는 0 또는 6, 모두 짝수이다. n이 4 또는 6일 때 n^2의 10의 자리수는 1 또는 3이다. 그러므로 a의 1의 자리수는 4 또는 6이다.

3. (ㄴ) 이미 알고있는것으로부터 $S_1=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ABF}-S_{\triangle BCF}$, $S_2=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle ABE}-S_{\triangle ADE}$이다. 그리고 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}$, $S_{\triangle ABF}=S_{\triangle ADO}=S_{\triangle BCO}=S_{\triangle ABE}$, $S_{\triangle BCF}=S_{\triangle CDO}=S_{\triangle ADE}$이므로 $S_1=S_2$이다.

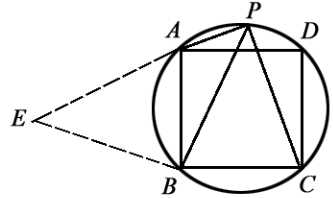
4. (ㄷ) 이미 알고있는것으로부터 $\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{a+b+c}=3$이다. 그러므로 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=3$이다. 그러면 $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-b)(b-c)=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+ab-ac-b^2+bc=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=3$이다.

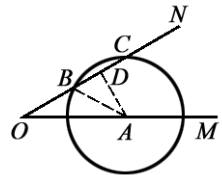
5. (ㄹ) BE를 맺으면 이미 알고있는것으로부터 $\angle CBA=\angle BEC=90^\circ$ 이로부터 $AC=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $AE=\frac{\sqrt{3}}{3}$을 얻을수 있다.

가름선의 정리로부터 $AF(AF+2)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\therefore AF=\frac{\sqrt{21}-3}{3}$

Ⅱ. 채우기문제

1. $50\left(3-2\sqrt{2}\right)$ a, b, c를 변으로 하는 하나의 직3각형 ABC를 그리자. 그 둘레의 값은 10으로서 일정한 값이다. 이런 직3각형중에서 2등변직3각형의 면적이 최대이다. 풀면 $a=b=5\left(2-\sqrt{2}\right)$, $c=10\left(\sqrt{2}-1\right)$, 따라서 최대값은 $ab=50\left(3-2\sqrt{2}\right)$

2. 1853 이미 알고있는것으로부터 $5x-23=\sqrt{469}$이다. 두제곱하고 정리하면 $46x=5x^2+12$를 얻는다. 다시 두제곱하고 정리하면 $25x^4-1996x^2+144=0$을 얻는다. 따라서 $25x^4-1996x^2+1997=1853$

3. $\sqrt{2}$ PA를 E까지 $AE=PC$되게 연장하고 BE를 맺으면 $\triangle ABE\equiv\triangle BCP$를 쉽게 증명할수 있다. 그러면 $BE=PB$, $\angle ABE=\angle CBP$이므로 $\angle PBE=\angle ABC=90^\circ$, $\triangle PBE$는 2등변직3각형이다. 따라서 $(PA+PC):PB=(PA+AE):PB=\sqrt{2}$ (그림)이다.

4. 12 그림에서 A를 원의 중심으로 하고 반경이 $50m$인 원 A를 그리자. ON은 원 A와 B, C에서 사귄다. 그리고 A를 지나 ON에 수직선을 긋고 그 사귐점을 D라고 하며 AB를 맺는다. 즉 탈곡기가 B까지 갈 때 소학교 A에 영향을 주기 시작하여 C까지 갈 때 그 영향에서 벗어난다. $AB=50$, $AD=\frac{1}{2}\cdot 80=40$, 그러면 $BD=DC=30$, 따라서 $BC=60$이다. 영향을 주는 시간은 $t=\frac{60}{5}=12\,\mathrm{s}$ ($18\,\mathrm{km/h}=5\,\mathrm{m/s}$)이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. $0\le a^2-4a-2\le 10$으로부터 $-2\le a\le 2-\sqrt{6}$ 또는 $2+\sqrt{6}\le a\le 6$, $y=(x-2a)^2+a^2-3a$이다. 최소값은 $m=a^2-$

$3a=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$, 그라프의 대칭축은 $a=\frac{3}{2}$이다. 우에 말한 a의 값 범위내에서 6은 대칭축으로부터 가장 멀리에 있다.

따라서 $a=6$일 때 주어진 함수의 최소값 m은 최대값 $m=6^2-3\times6=18$을 가진다.

2. 대각선 BD가 제형을 두개의 닮은3각형으로 나눈다고 가정하자. 변 AD에 대한 대응변이 아래와 같다고 보자.

(1) 만일 AD의 대응변이 DC이면 닮음비는 1, 두개3각형은 합동이고 BD는 공통변이므로 $\angle ADB$와 $\angle CDB$는 대응각이므로 $\angle ADB=\angle CDB$이다. $AB//CD$로부터 $\angle ABD=\angle CDB=\angle ADB$를 얻는다. $\therefore AB=AD$, $AB=125$, $AD=80$, 즉 $AB\neq AD$이므로 가정과 모순된다. 따라서 AD의 대응변은 DC가 아니다.

(2) 만일 AD와 BC가 대응변이라면 $\angle ABD=\angle BCD$이다. 그러나 $\angle ABD=\angle BDC$이다. 그러면 $\angle BCD=\angle BDC$, $\triangle CDB$는 2등변3각형이므로 $\triangle ABD$ 역시 2등변3각형이다. $BD=80$ 또는 125, 만일 $BD=80$이면 $\triangle CDB$는 2등변3각형이므로 $\triangle ABD$와 닮을수 없다. 만일 $BD=125$이면 $BC=125$이고 이때 $\triangle ABD\equiv\triangle CDB$이다. AD와 BD의 대응변의 비는 80:125이므로 가정과 모순된다.

(3) 만일 AD와 BC가 대응변이고 BD와 CD가 다른 한조의 대응변이면 $\frac{AD}{BC}=\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{BD}$, 즉 $\frac{80}{BC}=\frac{BD}{80}=\frac{125}{BD}$

$\therefore BD=100, BC=64$

결과 대각선 BD는 제형 $ABCD$를 두개의 닮음3각형으로 나눌수 있다. 이때 유일한 풀이는 $BC=64, BD=100$이다.

3. 옹근점5각형(자리표가 옹근수인 점들로 이루어진 5각형)을 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5라고 하자.

옹근점자리표의 짝홀성을 모두 네가지류형으로 나눈다. 즉

(홀수, 홀수), (홀수, 짝수), (짝수, 홀수), (짝수, 짝수), 따라서 5개 정점중에서 반드시 두개점은 같은 류에 속한다. 이 두점을 A_i, $A_j(1\leq i=j\leq5)$이라고 하면 선분 A_iA_j의가운데점 B 역시 옹근수점이다.

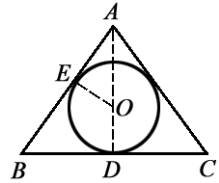
5각형의 5개정점중에서 A_i, A_j외에 3개의 정점이 있다는데로부터 직선 A_i, A_j의 같은쪽에 적어도 두개의 정점 $A_s, A_t(1\le S\ne t\le 5)$이 있다. 그러면 이 A_i, A_j, A_s, A_t를 정점으로 하는 하나의 볼록4각형을 만들며 이것은 적어도 5개의 옹근점 A_i, A_j, A_s, A_t, B를 덮는다.

시 험 56

I. 선택문제

1. (ㄴ) N은 4의 배수이므로 $y=2$ 또는 6이다. 만일 $y=2$이면 $\overline{x15272}+6$은 11의 배수이다. 즉 $(x+5+7)-(1+2+8)=x+1$은 11의 배수이고 풀이가 없다. 만일 $y=6$이면 $\overline{x15276}+6$은 11의 배수이다. 즉 $(x+5+8)-(1+2+2)=x+8$은 11의 배수이다. 그러면 $x=3$이므로 $x+y=9$

2. (ㄹ) 사는 곳으로부터 등산정점까지의 거리를 x라고 하면 $\frac{x}{3.2}+\frac{x}{4.5}+1.5\le 6.5$이다. 풀이는 $x\le\frac{720}{77}$, $9<x<10$이다. 따라서 등산하는 제일 먼 산의 정점은 D이다.

3. (ㄱ) 그림에서 D, E를 접점이라고 하자. AD와 OE를 각각 맺으면 $BE=BD=DC=2$이다.

$AE=x$라고 하면 $\triangle AOE\backsim\triangle ADB$라는것을 알수 있다. 그러면 $\frac{AO}{AB}=\frac{OE}{BE}$, 즉 $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}=\frac{1}{2}$이다. $x=\frac{4}{3}$, $\therefore\ AB=x+2=\frac{10}{3}$

4. (ㄷ) $y=6-2x(0\le x\le 3)$을 p에 대입하면 $p=2x^2-6x+18=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{2}$을 얻는다. $x=\frac{3}{2}$일 때 p는 최소값 $\frac{27}{2}$을 가진다. $x=0$ 또는 3일 때 p는 최대값 18을 가진다.

5. (ㄹ) 방정식의 량변을 두제곱하면 $a-x^2=2+x^2-2\sqrt{2}\,|x|$를 얻는다. 두변을 다시 두제곱하면 $(a-2-2x^2)^2=8x^2$을 얻는다.

이것을 정리하면 $4x^2-4ax^2+a^2-4a+4=0$

$x\neq0$일 때 x가 방정식의 풀이라면 $-x$ 역시 주어진 방정식의 풀이이다. 문제로부터 우의 방정식의 판별식 $\triangle\geq0$을 얻는다. 즉 $16a^2-16(a^2-4a+4)\geq0, a\geq1$

$x=0$이 주어진 방정식의 풀이라면 $a=2$, 이때 주어진 방정식도 역시 실수풀이 $\pm\sqrt{2}$를 가진다. $a\geq1$을 만족시키므로 $a\geq1$이다.

Ⅱ. 채우기문제

1. -316 이미 알고있는것으로부터 a,b,c중 반드시 두개는 부수이고 하나는 정수이다. 그것을 $a\langle0$, $b\langle0$, $c\rangle0$이라고 하면 $x=-1$을 얻을수 있다.

$$y=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}=-3$$

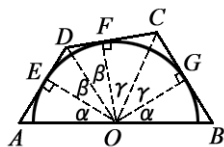
$\therefore\ x^{97}-96xy+y^3=-316$

2.5 α는 x^2+x-1의 풀이이므로 $\alpha^2+\alpha-1=0$, $\alpha^2=1-\alpha$, $\therefore$ $\alpha^4=1-2\alpha+\alpha^2=1-2\alpha+(1-\alpha)=2-3\alpha$, 따라서 $\alpha^4-3\beta=2-3(\alpha+\beta)=2-3\cdot(-1)=5$

3. $\frac{26}{3}$ $BD:DC=2:1, AB=BC=12$이므로 $BD=8$이다. $AE=x$라고 하면 $ED=x, BE=12-x$, 직3각형 BDE에서 $x^2=(12-x)^2+8^2$이므로 $AE=x=\frac{26}{3}$이다.

4.24 문제로부터 방정식 $x^2+kx+4-k=0$이 두개의 서로 다른 옹근수풀이 x_1,x_2을 가진다고 하면 $x_1+x_2=-k, x_1x_2=4-k$이다. k를 소거하면 $x_1+x_2-x_1x_2+4=0$을 얻는다. 즉 $(x_1-1)(x_2-1)=5$ x_1x_2은 각각 2, 6 또는 6, 2 또는 0, -4 또는 -4, 0이다. 그러면 $k=-8$ 또는 4이다. $k=-8$일 때 C점의 자리표는 (0, 12)이고 $AB=4$이므로 $S_{\triangle ABC}=24$이다. $k=4$일 때 C점의 자리표는 (0, 0)이므로 A,B,C는 한 직선에 놓인다. 따라서 $\triangle ABC$를 형성할수 없다. $S_{\triangle ABC}=24$

Ⅲ. 풀이문제

1. 그림에서 OE, OD, OF, OC, OG를 각각 맺으면 직3각형 $AOE \equiv$직3각형BOG를 쉽게 증명할수 있다.

$\therefore\ \angle A = \angle B,\ \angle AOE = \angle BOG = \alpha$

합동조건으로부터 $\angle DOE = \angle DOF = \beta,\ \angle COF = \angle COG = \gamma$를 증명할수 있다. $\therefore\ \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$

$\angle BCO = 90^\circ - \gamma = \alpha + \beta = \angle AOD$

$\triangle AOD \backsim \triangle BOC,\ \frac{AO}{AD} = \frac{BC}{OB}$이고 $AO = OB = \frac{1}{2}AB$

$\therefore\ \frac{1}{4}AB^2 = AD \cdot BC$, 즉 $AB^2 = 4AD \cdot BC$

2. $\frac{x^2-1}{y+1} = u,\ \frac{y^2-1}{x+1} = \upsilon$라고 하자.

문제로부터 $u+\upsilon, u\upsilon$는 모두 옹근수라는것을 알수 있다. $u+\upsilon = m$, $uv = n$이라고 하면 u, υ는 옹근수결수를 가진 2차방정식 $t^2 - mt + n = 0$의 두개의 유리수풀이이므로 $\triangle = m^2 - 4n$은 옹근두제곱수이고 m과 $\sqrt{m^2-4n}$의 짝홀성은 같다.

그리고 $u,\ \upsilon = \frac{m \pm \sqrt{m^2-4n}}{2}$, $\therefore\ u,\ \upsilon$는 모두 옹근수이다.

3.(1) 방정식이 실수풀이를 가진다는데로부터

$0 \le \triangle = (a+b+c)^2 - 4(ab+bc+ca) = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca = a(a-b-c) - b(a+c-b) - c(a+b-c) < a(a-b-c)$

$a > 0$으로부터 $a-b-c > 0$을 얻는다. 즉 $a > b+c$, $\therefore\ a, b, c$는 하나의 3각형의 세변을 구성할수 없다.

(2) $f(x) = x^2 - (a+b+c)x + ab + bc + ca$라고 하자.

$f(b+c) = bc > 0$이다.

$f(a) = bc > 0$

$f\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = \frac{-(a+b+c)^2 + 4(ab+bc+ca)}{4} < 0$

즉 2차방정식의 실수풀이 x_0은 모두 $b+c$와 a사이에 있다.

$\therefore\ a > x_0 > b+c$

(3) 풀이와 결수관계로부터 $a+b+c=15, ab+bc+ca=54$이다.

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=225-108=117 < 11^2$

(2) 물음으로부터 $a>9$를 알수 있으므로 $9^2<a^2<11^2$를 얻는다. $a=10$뿐이다.

$\therefore\ b+c=5, bc=4, b>c$로부터 $b=4, c=1$

$\therefore\ a=10, b=4, c=1$

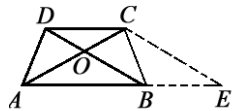
시 험 57

I. 선택문제

1.(ㄱ) 이미 알고있는것으로부터 $x-y=a^2bc, y-z=ab^2c, z-x=abc^2$을 얻는다. 이 세식을 더하면 $abc(a+b+c)=0$을 얻는다. 그리고 $abc>0$, $\therefore\ a+b+c=0, a, b, c$는 모두 부수일수 없다. 따라서 하나만이 부수가 아니다.

2.(ㄹ) 이미 알고있는것으로부터 $3a^2-2a-663=0$, 그러면 $3a^2-664\frac{1}{3}a-444=\left(a+\frac{2}{3}\right)(3a^2-2a-663)-2=-2$, 따라서

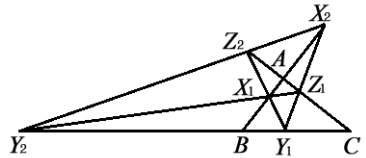
$$\left(3a^2-664\frac{1}{3}a-444\right)^3=(-2)^3=-8$$

3.(ㄷ) 그림에서 $AC=m, BD=n, \angle BOC=60°$라고 하자. C를 지나 BD에 평행인 선을 긋고 AB의 연장선과의 사귐점을 E라고 하면 4각형 $BECD$는 평행4변형이다. $\angle ACE=120°$, $CE=BD, S_{\triangle BCE}=S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ACD}$이므로 $S_{ABCD}=S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}AC\cdot CE\cdot \sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{4}mn$이다.

4.(ㄹ) 이미 알고있는것으로부터 $x_1+5x_2x_3=6$ ……①, $x_2+5x_3x_1=6$ ……②, $x_3+5x_1x_2=6$ ……③이다. ①, ②로부터 $(x_1-x_2)(1-5x_3)=0$을 얻는다. 이로부터 $x_1=x_2$ 또는 $x_3=\frac{1}{5}$, $x_1=x_2$을 ③에 대입하면 $x_3=6-5x_1^2$이다. 이것을 다시 ①에 대입하면 3조의 풀이를 얻을수 있다. $x_3=\frac{1}{5}$을 각각 ①, ③에 대입해도 역시 두조의

풀이를 얻을수 있다. 따라서 5조의 풀이를 가진다.

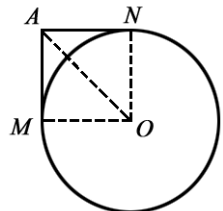
5. (ㄱ) 이미 알고있는것으로부터 $\frac{a}{a+b+c}=\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$, $\frac{b}{a+b+c}=\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$를 가진다. 그러므로 $a:b:c=3:4:5$이다.

$a=3t, b=4t, c=5t$라고 하면 A, B, C는 모두 직선 $y=\frac{x}{t}(t\neq 0)$우에 있다.

6. (ㄹ) 그림에서 A, B, C로부터 직선 l까지의 거리가 다르다는데로부터 l와 AB, BC, CA는 평행이 아니다. AB우에서 내분점 X_1, 외분점 X_2을 $AX_1:X_1B=1:2$, $X_2A:X_2B=1:2$ 되게 그린다. BC우에서 내분점 Y_1, 외분점 Y_2을 $BY_1:Y_1C=2:3$, $Y_2B:Y_2C=2:3$ 되게 그린다. 그리고 CA우에서 내분점 Z_1, 외분점 Z_2을 $AZ_1:Z_1C=1:3$, $Z_2A:Z_2C=1:3$되게 그린다. 그러면 조건을 만족시키는 직선 l은 아래의 네가지가 있다. 즉 $Y_2Z_2X_2$, $Y_2X_1Z_1$, $Y_1X_1Z_2, Y_1Z_1X_2$

Ⅱ. 채우기문제

1. -2 이미 알고있는것으로부터 $(a+b)^2\leq 0$을 얻는다. ∴ $a=-b\neq 0$, 따라서 주어진 식은 $\frac{(-b)^2+b^2}{(-b)b}=-2$이다.

2. 7 이미 알고있는 두 식의 량변을 두제곱하면 $a-2\sqrt{6}=x+y-2\sqrt{xy}$이다. a, x, y는 모두 자연수이므로 $x+y=a, xy=6$이다. 이미 알고있는것으로부터 $x>y$을 알수 있다. 따라서 $x=6$, $y=1$ 또는 $x=3$, $y=2$뿐이다. 이로부터 $a=7$ 또는 2, a의 최대값은 7이다.

3. $2\sqrt{3}-\pi$ 그림에서 작은 원이 닿지 않는 곳은 6개 정점근방(정점덩어리)이다. 하나의 작은 덩어리의 면적은 $2S_{\triangle OAM}-\frac{1}{6}S_{원O}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1-\frac{1}{6}\pi\cdot 1^2=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}$이다. 따라서 6개 작은덩이의 면

적의 합은 $2\sqrt{3}-\pi$ 이다.

4. $\frac{3\sqrt{11}}{4}$ a, b, c가 3각형의 세변이고 그 길이가 모두 자연수라는데로부터 $a=1$일 때 $b=c=5, abc=25$; $a=2$일 때 b, c는 4, 5, $abc=40$; $a=3$일 때 b, c는 3, 5 또는 4, 4, $abc=45$ 또는 48이다. $abc=25$가 최소이다. 이런 2등변3각형의 면적은 $\frac{3\sqrt{11}}{4}$이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 주어진 방정식으로부터 항등식을 얻을수 있다.

$(7x-4)-(7x-5)=(4x-1)-(4x-2)$

그리고 주어진 방정식의 왼쪽, 오른쪽 두변은 모두 0이 아니다. 우의 등식과 주어진 방정식의 두 변을 나누면

$$\frac{\left(\sqrt{7x-4}+\sqrt{7x-5}\right)\left(\sqrt{7x-4}-\sqrt{7x-5}\right)}{\sqrt{7x-4}-\sqrt{7x-5}}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x-2}\right)\left(\sqrt{4x-1}-\sqrt{4x-2}\right)}{\sqrt{4x-1}-\sqrt{4x-2}}$$

이로부터 $\sqrt{7x-4}+\sqrt{7x-5}=\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x-2}$ 를 얻는다. 이것을 다시 주어진 방정식과 더하면 $\sqrt{7x-4}=\sqrt{4x-1}$ 을 얻을수 있다. 따라서 풀이는 $x=1$이다. 검산하면 $x=1$은 주어진 방정식의 풀이이다.

2. $\alpha+\beta=7$, $\alpha\beta=8$, 그러면 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=33$, $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=17$, 그리고 $\alpha>\beta$이면 $\alpha-\beta=\sqrt{17}$ 이다.

$A=\frac{2}{\alpha}+3\beta^2$, $B=\frac{2}{\beta}+3\alpha^2$ 이라고 하자.

$$A+B=2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+3\left(\alpha^2+\beta^2\right)=\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+3\left(\alpha^2+\beta^2\right)$$

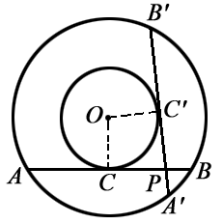
$$=\frac{2\cdot 7}{8}+3\cdot 33=100\frac{3}{4},\quad A-B=2\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)-3\left(\beta^2-\alpha^2\right)=\frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha\beta}$$

$$+3(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)=\frac{-2\sqrt{17}}{8}+3\cdot 7\cdot\left(-\sqrt{17}\right)=-\frac{85}{4}\sqrt{17}$$

$$\therefore A=\frac{1}{2}\left(100\frac{3}{4}-\frac{85}{4}\sqrt{17}\right)=\frac{1}{8}\left(403-85\sqrt{17}\right)$$

즉 $\frac{2}{\alpha}+3\beta^2=\frac{1}{8}\left(403-85\sqrt{17}\right)$

3. AB의 가운데점을 C, $A'B'$는 점 C를 제외한 AB의 기타 모든 점을 통과한다고 하자.

그림에서 원 O를 중심으로 하여 OC의 반경으로 작은 원 O를 그린다.

임의로 활줄 AB우에서 C점이 아닌 다른 한 점 P를 취하면 P는 작은 원 O밖에 있고 P에서 그은 작은 원 O의 두개 접선은 원 O안에서 하나는 활줄 AB, 다른 하나는 활줄 $A'B'$이다. 그것들의 활줄중심거리 $OC=OC'$이고 $AB=A'B'$이다. $\triangle OAB$를 O주위로 $\alpha=\angle COC'$만큼 회전시켜 $\triangle OA'B'$를 얻는다. 그러면 $A'B'$는 바로 AB우의 C아닌 점 P를 지날수 있다.

그리고 C점에 대하여 작은 원 O우에서 C점을 지나는 접선은 하나 있다. 만일 $A'B'$가 C점을 통과할수 있다면 $A'B'$와 AB는 겹치지 않는다는데로부터 $A'B'$는 작은 원 O의 가름선이고 활줄 $A'B'$의 중심거리 $OC'<OC$, 따라서 $A'B'>AB$, 그러나 이것은 불가능한것이다.

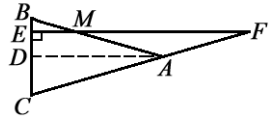
시 험 58

I. 선택문제

1. (ㄴ) 만일 녀학생 10명이 있다면 이 10명중에는 남학생이 없다. 이것은 문제설정과정에 임의의 10명중 적어도 남학생이 1명 있다는것과 모순된다. 그러므로 녀학생은 많아서 9명 있다.

또한 문제설정으로부터 녀학생이 적어도 9명 있으므로 녀학생은 반드시 9명 있다. 따라서 남학생은 $100-9=91$명이다. 따라서 (ㄴ)를 선택한다.

2. (ㄴ) 두번째 방정식이 $(x+y)z=23$이고 $x+y\geq 23$, 23은 씨수이므로 $z=1$, $y=23-x$를 첫번째 방정식에 대입하여 $x^2-22x+40=0$을 얻는다. 이것은 두 풀이 $x_1=2$, $x_2=20$을 가진다. 따라서 주어진 방정식의 풀이는 2조 있다.

3. (ㄱ)　　그림에서 A를 지나 BC에 수직선을 긋고 그 사귐점을 D라고 하자. 이미 알고있는것으로부터 $FE//AD$를 얻을수 있다.

$\therefore\ \frac{BE}{ED}=\frac{BM}{MA}=\frac{1}{2}$, $\frac{CD}{CE}=\frac{AD}{FE}=\frac{3}{5}$, 이로부터

$CD=2, CE=\frac{10}{3}, AD=\sqrt{7^2-2^2}=3\sqrt{5}$, 따라서 $EF=5\sqrt{5}$이다.

4. (ㄷ)　　α, β를 방정식 $x^2-2x+m=0$의 두 풀이라고 하면 $\triangle\geq0$, $m\leq1$을 얻는다. $\therefore\ \alpha+\beta=2>1$, 그리고 3각형의 두 변의 차가 세번째 변보다 작다는데로부터 $|\alpha-\beta|<1$, 즉 $(\alpha-\beta)^2<1$을 얻는다. 베타정리로부터 $m>\frac{3}{4}$을 구할수 있다. 따라서 $\frac{3}{4}<m\leq1$이다.

5. (ㄹ)　　이런 네자리수를 $100a+b(10\leq a\leq99, 1\leq b\leq99)$라고 하면 이미 알고있는것으로부터 $(100a+b)\div b=(a+1)^2$이다. 그러면 $100a+b=(a+1)^2b=a^2b+2ab+b$, $100=b(a+2)$를 얻는다. 따라서 $b=5$, 4, 2, 1, 이런 4자리수는 4개 있다. 즉 1805, 2304, 4802, 9801

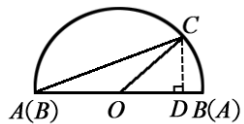
6. (ㄹ)　　$x\geq0$일 때 $y-x\leq0$, 즉 $\frac{1}{10}(x^2-11x+18)\leq0$, 이로부터 풀이는 $2\leq x\leq9$이다.

$x<0$일 때 $y+x\leq0$, 즉 $\frac{1}{10}(x^2+9x+18)\leq0$, 이로부터 풀이는 $-6\leq x\leq-3$이다.　따라서 $2\leq x\leq9$ 또는 $-6\leq x\leq-3$

Ⅱ. 채우기문제

1. 5　　이미 알고있는것으로부터 $a^2+a=\frac{1}{4}, a\neq1$이다.

$$\therefore\ \frac{a^3-1}{a^3-a}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a-1)(a^2+a)}=\frac{\frac{1}{4}+1}{\frac{1}{4}}=5$$

2. 15° 또는 75°　　그림에서 C를 지나 AB에 수직선을 긋고 그 사귐점을 D라고 하자. $\angle ACB=90°$, 그리고 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}\cdot$

$2OC \cdot CD = OC \cdot CD, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} OC^2$, ∴ $CD = \frac{1}{2} OC$, $\angle COB = 30° = 2\angle CAB$이므로 $\angle CAB = 15°$, D가 OA우에 있을 때에는 $\angle CAB = 75°$이다.

주] 이 문제의 답 하나는 쉽게 잃어버릴수 있다.

3. 10, 9, 1 또는 10, 2, 1 또는 11, 3, 2 　 $a-b, b-c, a-c$는 모두 정의옹근수이고 $a-c=(a-b)+(b-c)$이므로 72를 인수분해하여 3개 인수를 얻을 때 우의 조건을 만족시키는것은 1, 8, 9 또는 8, 1, 9뿐이다. 따라서

$$\begin{cases} a-b=1 \\ b-c=8 \\ a-c=9 \end{cases} \quad (1) \qquad\qquad \begin{cases} a-b=8 \\ b-c=1 \\ a-c=9 \end{cases} \quad (2)$$

(1)과 $abc < 100$으로부터 a, b, c가 10, 9, 1이라는것을 얻을수 있다.

(2) 와 $abc < 100$으로부터 $c=1$ 또는 2를 얻는다. 따라서 a, b, c는 10, 2, 1 또는 11, 3, 2이다.

4. $\frac{4}{5}$ 　 $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 로부터

주어진 식은 $\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{24}} - \frac{1}{\sqrt{25}}\right) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

Ⅲ. 풀이문제

1. 이미 알고있는것으로부터 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$를 얻을수 있다.

∴ $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$, 즉 $\frac{d}{h_2} = \frac{h_1 - d}{h_1}$, $dh_1 = h_1h_2 - dh_2$이므로

$h_1 + h_2 = \frac{h_1h_2}{d}$ ……① 이 값을 $m(m > 0)$이라고 하자.

$h_1 + h_2 = m, h_1h_2 = dm$이므로 h_1, h_2은 방정식 $x^2 - mx + dm = 0$의 두 풀이이다. 이로부터 $x = \frac{1}{2}\left(m \pm \sqrt{m^2 - 4dm}\right)$ ……②

식 ①을 두제곱하고 정리하면 $h_1^2 + h_2^2 = \left(\frac{h_1h_2}{d}\right)^2 - 2h_1h_2$, 즉 $l^2 = m^2 - 2dm$을 얻는다. ∴ $m^2 - 2dm - l^2 = 0$, 이로부터

$m = \frac{1}{2}\left(2d + \sqrt{4d^2 + 4l^2}\right) = d + \sqrt{d^2 + l^2}$ (부수값은 버린다), 이것을 ②에 대입하고 간단히 하면

$$x = \frac{1}{2}\left(d + \sqrt{d^2 + l^2} \pm \sqrt{l^2 - 2d^2 - 2d\sqrt{d^2 + l^2}}\right)$$

즉 이것은 h_1, h_2의 값이다.

2. 그림에서 I가 $\triangle ABC$의 내심이라고 하고 AF를 맺으면

$\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2}\angle ABC$이고 $\angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2}\angle ACB$,

$\angle 5 = \frac{1}{2}\angle BAC$이므로 $\angle 1 + \angle 3 + \angle 5 = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC) = 90^\circ$이다.

$\therefore AA_1 \perp EF$, 같은 원리로부터 $BB_1 \perp DF, CC_1 \perp DE$

$\therefore \angle FA_1I + \angle FB_1I = 180°$이므로 A_1, F, B_1, I 네점은 한 원에 놓인다. $\therefore \angle 6 = \angle 7$, 같은 원리로부터 $\angle 8 = \angle 9$

그리고 $\angle 7 = \angle 9$이므로 $\angle 6 = \angle 8$, 즉 A_1I는 $\angle B_1A_1C_1$의 2등분선이다.

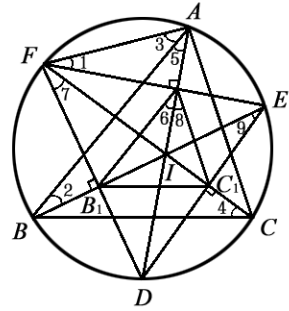
같은 원리로부터 B_1I, C_1I는 각각 $\angle A_1B_1C_1$, $\angle A_1C_1B_1$의 2등분선이다.

$\therefore I$는 $\triangle A_1B_1C_1$의 내심이다.

3. (1): 녀자아이속도를 x계단/min, 승강기속도를 y계단/min, 계단수를 S라고 하면 남자아이속도는 $2x$계단/min이다.

$$\begin{cases} \frac{27}{2x} = \frac{S-27}{y} \\ \frac{18}{x} = \frac{S-18}{y} \end{cases}$$ 두 식을 나누면 $\frac{3}{4} = \frac{S-27}{S-18}$

풀면 $S=54$계단, 즉 로출된 승강기계단은 54계단이다.

(2): 남자아이가 녀자아이를 첫번째로 따라잡을 때 승강기를

m번 걷고 계단을 n번 걷는다고 하면 녀자아이가 걷는 승강기는 $(m-1)$번, 걷는 계단은 $(n-1)$번이다.

(1)로부터 련립방정식의 풀이는 $y=2x$이다. 그러면 남자아이는 승강기 $4x$계단/min, 녀자아이는 $3x$계단/min 걷는다.

$$\frac{54m}{4x}+\frac{54n}{2x}=\frac{54(m-1)}{3x}+\frac{54(n-1)}{x},\ \frac{m}{4}+\frac{n}{2}=\frac{m-1}{3}+\frac{n-1}{1},$$

즉 $6n+m=16$이다.

그리고 m, n중 반드시 하나는 정의옹근수이고 $0 \le m-n \le 1$이다.

m	1	2	3	4	5
$n=\frac{16-m}{6}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{6}$	2	$1\frac{5}{6}$

n	1	2
$m=16-6n$	10	4

$m=3, n=2\frac{1}{6}$뿐이다.

따라서 남자아이가 걷는 계단수는 $3\times27+2\frac{1}{6}\times54=198$계단

시 험 59

I. 선택문제

1.(ㄹ) $3-a>0$으로부터 $(a-3)\sqrt{\frac{1}{3-a}}=(a-3)$이다.

$$\sqrt{\frac{3-a}{(3-a)^2}}=\frac{a-3}{3-a}\cdot\sqrt{3-a}=-\sqrt{3-a}.$$

2.(ㄴ) $-2\le x\le1$로부터 $y=1-x-2|x|+x+2=3-2|x|$

$x=0$일 때 최대값 3을 가진다. $x=-2$일 때 최소값 -1을 가진다. 이것들의 합은 2이다.

3.(ㄱ) 방정식은 명백히 하나는 정수풀이, 다른 하나는 부수풀이를 가진다. $x>0$일 때 $x=\frac{m}{m-1}>0(m>0$이고 $m\ne1)$이므로 $m>1$이다.

$x \langle 0$일 때 $x=\dfrac{-m}{m+1}<0$이므로 $m \rangle -1$이다. 따라서 $m \rangle 1$이다.

4. (ㄴ)　　AB와 l_2은 E에서 사귄다고 하면 $AE=EB$이다. $AD=2x, DE=\sqrt{5}x, S_{\triangle ADE}=\dfrac{1}{2}x \cdot 2x=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}x\cdot h$라고 하면 $2x=\sqrt{5}h$, $\therefore S_{ABCD}=5h^2$

5. (ㄷ)　　x는 무리수이고 $(x+1)(x+3)=x^2+4x+3$은 유리수이다.

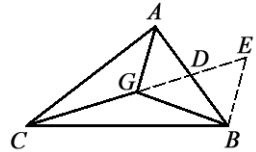
(1) x^2이 유리수이면 x^2+4x+3은 무리수이다. 이것은 모순된다.

(2) $(x-1)(x-3)=(x^2+4x+3)-8x$이고 유리수에서 무리수를 덜면 역시 무리수이다. ∴ (2)는 정확하다.

(3) $(x+1)^2=(x^2+4x+3)-2x-2$는 무리수이다.

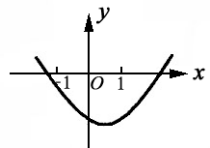
(4) $(x-1)^2=(x^2+4x+3)-6x-2$는 무리수이다.

따라서 (4)는 정확하다.

6. (ㄷ)　　그림에서 CG를 $DE=GD$ 되게 E까지 연장하면 AB와 D에서 사귄다. 이미 알고있는것으로부터 $AD=BD$이다. $BE=AG=6$, $GD=DE=\dfrac{1}{2}CG=5$, 즉 $GE=10$이다. $BG=8$로부터 $BG^2+BE^2=GE^2$을 얻을수 있다. $\angle EBG=90°$, $BE/\!/AG$이므로 $\angle AGB=90°$. ∴ $S_{\triangle AGB}=24, S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle AGB}=72$

Ⅱ. 채우기문제

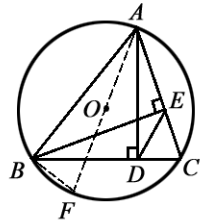
1. 90　　전번주의 문제수를 x라고 하자. 그러면 $120\times 90\%-x=20\%x$이다. 풀면 $x=90$문제이다.

2. $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$　　DEF는 $\triangle ABC$의 메이지선이다. 메네라우스정리로부터 얻을수 있다.

$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$, 즉 $\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{4}{2}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$이므로 $\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{1}{2}$, FC를 맺는다. $S_{\triangle BCF}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle CEF}=\dfrac{1}{6}S_{\triangle ABC}$이므로 $S_{4각형 BCEF}=S_{\triangle BCF}+S_{\triangle CEF}=\dfrac{2}{3}S_{\triangle ABC}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin 60°$

$= \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

3. 101　　$y=x^2+(2m-1)x+(m-6)$의 그라프가 그림과 같다고 하자. $\triangle=(2m-1)^2-4(m-6)=4(m-1)^2+21>0$, 련립부등식 $\begin{cases} f(-1)<0 \\ f(1)<0 \end{cases}$ 로부터 $-4 \le m \le 2$를 얻을수 있다.

두 풀이의 두제곱의 합은 $x_1^2+x_2^2=4m^2-6m+13=4\left(m-\frac{3}{4}\right)^2+10\frac{3}{4}$ 이다. $m=-4$일 때 최대값은 101이다.

4. 9　　그림에서 $\triangle ABC$의 외접원을 그리고 원 O의 직경을 AF라고 하자. BF를 맺으면 문제설정으로부터 $\triangle DEC \backsim \triangle ABC$를 얻을수 있다.

그러면 $\frac{S_{\Delta DEC}}{S_{\Delta ABC}}=\left(\frac{DE}{AB}\right)^2$, 즉 $\frac{2}{18}=\left(\frac{2\sqrt{2}}{AB}\right)^2$, $AB=6\sqrt{2}$

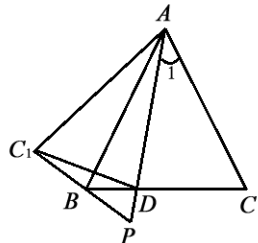
이므로 $\cos C=\frac{CE}{BC}=\frac{DE}{AB}=\frac{1}{3}$, $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다. 따라서 $AF=\frac{AB}{\sin F}=\frac{AB}{\sin C}=9$이다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 2차함수 $y=ax^2+(b-c)x+(a+b+c)$를 보조적으로 취하면 $x_1=0$일 때 $y_1=a+b+c$이고 $x_2=-1$일 때 $y_2=a-(b-c)+(a+b+c)=2(a+c)$이다. $\therefore y_1y_2=2(a+c)(a+b+c)<0$

이것은 2차함수의 그라프우의 두 점$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$이 x축 량쪽에 있다는것을 말해준다. 즉 이 함수의 그라프와 x축은 사귄다.
$\therefore$ 이 2 차함수의 판별식은 0 보다 크다.

즉 $(b-c)^2-4a(a+b+c)>0$

2. 그림에서 $AB=AC$이므로 $\angle ABC=\angle C$이다. 점 C_1와 점 C는 AD에 관해 대칭이므로 $\angle C_1=\angle C=\angle ABC$, $\angle C_1AP=\angle 1$

$\therefore$ 네점 A, C_1, B, D는 한 원안에 놓인다.
$\angle PBC=\angle C_1AP=\angle 1$,

C, A, B, P 네점은 한 원안에 놓인다.

$\therefore$ $\angle P = \angle C = \angle ABD$, 그리고 $\angle BAP = \angle DAB$

$\therefore$ $\triangle ABD \backsim \triangle APB$이므로 $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AP}$,

즉 $AD \cdot AP = AB^2$은 일정한 값이다.

3. a, b, c, d는 모두 정수이므로

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d} > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1;$$

그리고 $S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d} < \frac{a+c}{a+b+c+d} + \frac{b+d}{a+b+c+d} + \frac{c+a}{a+b+c+d} + \frac{d+b}{a+b+c+d} = \frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 2$

$\therefore$ $1 < S < 2$

시 험 60

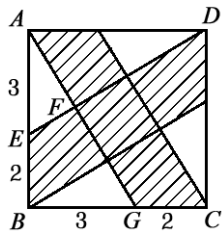
I. 선택문제

1. (ㄱ) 이미 알고있는것 $\triangle < 0$으로부터 풀이는 $2 < a < 4$로 얻을수 있다. 따라서 주어진 식은 $\sqrt{(a-4)^2} + |2-a| = 4 - a + a - 2 = 2$

2. (ㄹ) 이미 알고있는것으로부터 $a = 2 - \sqrt{3} < 1$을 얻는다. 그러면 주어진 식$= \frac{(a+1)(a-1)}{a+1} - \frac{\sqrt{(a-1)^2}}{a(a-1)} = a - 1 + \frac{a-1}{a(a-1)} = a - 1 + \frac{1}{a} = 2 - \sqrt{3} - 1 + 2 + \sqrt{3} = 3$

3. (ㄴ) 그림에서 4개변우에 있는 작은 3각형들은 각각 합동인 직3각형들이고 $\triangle AFE \backsim \triangle ABG$라는것을 알수 있다.

$\therefore$ $\frac{S_{\triangle AFE}}{S_{\triangle ABG}} = \left(\frac{AE}{AG}\right)^2$, 즉 $\frac{S_{\triangle AFE}}{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5} = \left(\frac{3}{\sqrt{3^2 + 5^2}}\right)^2$

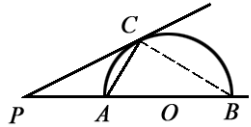
$S_{\triangle AFE} = \frac{135}{68}$. $\therefore$ $S_{사선} = 5^2 - 4 \times \frac{135}{68} = \frac{290}{17}$

4. (ㄷ)　　이미 알고있는 방정식을 간단히 하면 $y=-\frac{3}{b}x-\frac{c}{b}$, $y=\frac{c}{2}x+6$이다. 만일 두 도형이 겹친다면 $-\frac{3}{b}=\frac{c}{2}$이고 $-\frac{c}{6}=6$이여야 한다. 이로부터 (b,c)는 $(-1,6),(1,\ -6)$이다.

5. (ㄷ)　　BC우에서 $BF=AB$는 점을 F라고 하고 DF를 맺으면 $\triangle ABD\equiv\triangle FBD$이다. ∴ $DF=DA=DE$. 조건으로부터 $\angle ACB=40°$, $\angle DFC=180°-\angle DFB=180°-\angle A=80°$

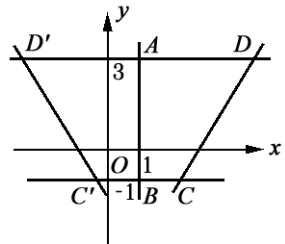
∴ $\angle FDC=60°$, 그리고 $\angle EDC=\angle ADB=180°-\angle ABD-\angle A=180-20°-100°=60°$, 이로부터 $\triangle DCE\equiv\triangle DCF$이다.

∴ $\angle ECA=\angle DCB=40°$

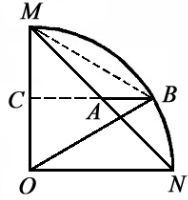
6. (ㄴ)　　그림에서 BC를 맺으면 조건으로부터 $\triangle PAC\backsim\triangle PCB$이다. 그러면 $\frac{AC}{BC}=\frac{PA}{PC}=\frac{2}{3}$이다. $AC=2k$, $BC=3k$라고 하면

$\angle ACB=90°$이므로 $AB=\sqrt{13}k$를 얻는다. 따라서 $\sin\angle ACP=\sin\angle ABC=\frac{AC}{AB}=\frac{2k}{\sqrt{13}k}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$

Ⅱ. 채우기문제

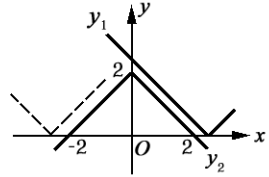
1. 10　　이미 알고있는것으로부터 기타 $n-3$개의 내각의 합은 $(n-2)\cdot180°-285°$이다. 이것은 $n-3$으로 완제된다. 그리고 그 상 역시 15°의 옹근수배인데 그 상은 $180°-\frac{105°}{n-3}$이다. 따라서 조건을 만족시키는 $n=10$이다.

2. 1 또는 -2　　그림에서 점$D(D')$는 $\left(\frac{6}{m},3\right)$, 점 $C(C')$는 $\left(\frac{2}{m},-1\right)$이다. 만일 직선 $y=mx-3$이 CD라면 $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{6}{m}-1\right)+\left(\frac{2}{m}-1\right)\right]\cdot4=12$이다. 이것을 풀면 $m=1$이다.

만일 직선 $y=mx-3$이 $C'D'$라면 $\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{6}{m}\right)+\left(1-\frac{2}{m}\right)\right]\cdot4=12$이

다. 풀면 $m=-2$이다.

3. 30°　　그림에서 BA를 연장하여 OM과의 사귐점을 C'라고 하고 MB를 맺는다. A가 MN의 가운데점이고 $AB//ON$이라는데로부터 $MC=CO$를 얻을수 있다. $BC\perp OM$이면 $OB=MB$이다. 그리고 $OB=OM$이므로 $\triangle OMB$는 등변3각형이다. 따라서 $\angle MOB=60^\circ$이고 $\angle BON=30^\circ$이다.

4. $a\le -2$ 또는 $a\ge 2$

$|x-a|<2-|x|$, 여기서 $y_1=|x-a|$, $y_2=2-|x|$라고 하면

$$y_1=\begin{cases} x-a(x\ge 0) \\ -x+a(x<0) \end{cases},\quad y_2=\begin{cases} 2-x(x\ge 0) \\ 2+x(x<0) \end{cases}$$ 이다.

이미 알고있는것으로부터 $y_1<y_2$이므로 실수풀이가 없다. 그림에서 두 함수의 그라프를 찾을수 있다. $a\le -2$ 또는 $a\ge 2$일 때 y_1의 그라프는 y_2의 그라프아래에 놓이지 않는다.

Ⅲ. 풀이문제

1. 주어진 방정식을 간단히 하면

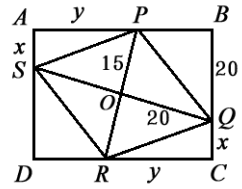
$$\begin{cases} \left(x+\dfrac{9}{x}\right)+\left(y+\dfrac{4}{y}\right)=10 \\ \left(x+\dfrac{9}{x}\right)\left(y+\dfrac{4}{y}\right)=24 \end{cases}$$

$\therefore$ $x+\dfrac{9}{x}$, $y+\dfrac{4}{y}$는 방정식 $t^2-10t+24=0$의 두 풀이이다. 풀면 $t_1=4, t_2=6$, 즉

$$\begin{cases} x+\dfrac{9}{x}=4 \\ y+\dfrac{4}{y}=6 \end{cases}$$ 이것은 실수풀이가 없다.

$$\begin{cases} x+\dfrac{9}{x}=6 \\ y+\dfrac{4}{y}=4 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

검산하면 이 풀이쌍은 주어진 련립방정식의 풀이이다.

2. 그림에서 직4각형, 등변4각형은 모두 대칭중심이 O인 중심대칭도형이라는데로부터 $DS=BQ=20, DR=PB=15$를 얻을수 있다.

$\triangle PBQ$, $\triangle POQ$, $\triangle POS$, $\triangle ROQ$, $\triangle ROS$, $\triangle RDS$는 모두 합동이고 그 면적은 150이다.

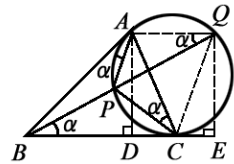
그리고 $AS=CQ=x, AP=CR=y$라고 할수 있고 등변4각형의 변의 길이는 25이다. 련립방정식으로 만들면

$$\begin{cases} 6\cdot 150+2\cdot\frac{1}{2}xy=(x+20)(y+15) \\ x^2+y^2=25^2 \end{cases}$$

이것을 풀면 $\begin{cases} x=\frac{44}{5} \\ y=\frac{117}{5} \end{cases}$, $\begin{cases} x=20 \\ y=15 \end{cases}$

$x=20$일 때 $BC=40$과 $PR=30$은 모순된다. 그러므로 두번째풀이는 버린다.

∴ 직4각형 $ABCD$의 변의 길이는 $2\left(15+\frac{117}{5}+20+\frac{44}{5}\right)=\frac{672}{5}$이다.

3. 그림에서 A에서 BC에 평행인 선을 긋고 BP의 연장선과의 사귐점을 Q라고 한다. CQ를 맺고 A에서 BC에 수직선을 긋고 BC와의 사귐점을 D, Q에서 BC에 수직선을 긋고 그 사귐점을 E라고 한다.

그러면 $\angle AQP=\angle QBC=\angle PCA=\alpha$, ∴ A, P, C, Q 네점은 한 원안에 놓인다. $\angle PAC=\angle PQC$, $\angle AQP=\angle PAB$, $\angle BAC=\angle AQC=\angle QCE$, ∴ $\cot A=\cot\angle BAC=\cot\angle QCE=\frac{CE}{QE}$; $\cot B=\cot\angle ABD=\frac{BD}{AD}$, $\cot C=\cot\angle ACD=\frac{CD}{AD}$, $AD=QE$이므로

$$\frac{CE}{QE}+\frac{BD}{AD}+\frac{CD}{AD}=\frac{CE+BD+CD}{QE}=\frac{BE}{QE},$$ 그리고 $\cot\alpha=\cot\angle QBE=\frac{BE}{QE}$,

$\therefore\ \cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$

이 책은 중문 저 ( ) (2001년판)을 번역한것이다.

이 책에는 1중학교입학준비를 하는 학생들에게 도움이 되는 문제들과 풀이방법들이 서술되여있다.

이 책은 보통교육부문 교원, 학생들을 위한 참고서로 번역출판한다.

수재들을 위한 수학시험문제집 2

번역 김은주 심사 박춘화, 리순희
편집 최혜란
장정 리승일 교정 최미레

낸 곳 외국문도서출판사
인쇄소 평양시인쇄공장
인쇄 주체94 (2005)년 8월 20일 발행 주체94(2005)년 8월 30일

교－04－1285 5000부 값 400원